Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematatisk-fysiske Meddelelser. **II**, 12.

# RECHERCHES

SUR LES

# POLYNOMES DE STIRLING

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1920

# INTRODUCTION

Jacobus Stirling, dans son Traité[1] intéressant, mais trop peu connu, a étudié les deux classes de nombres positifs entiers que nous désignons, dans ce qui suit, par $C_{n+1}^{p}$ et $\mathfrak{C}_{n+1}^{p}$, et l'étude de Stirling est si profonde qu'il a calculé des petites tables et des $C_{n+1}^{p}$ et des $\mathfrak{C}_{n+1}^{p}$. C'est pourquoi nous désignons comme nombres de Stirling de première et de seconde espèce les $C_{n+1}^{p}$ respectivement les $\mathfrak{C}_{n+1}^{p}$.

Les deux classes de positifs entiers, introduits par Stirling, jouant un rôle assez fondamental et dans l'Analyse et dans la théorie des Nombres, ils ont été étudiés par beaucoup de géomètres; nous nous bornerons à citer ici Euler[2], Laplace[3], Herschel[4], Grunert[5] et Schlömilch[6]. Dans nos jours, feu M. Thiele[7] a appliqué, du même point de vue que Stirling, les $C_{n+1}^{p}$ et les $\mathfrak{C}_{n+1}^{p}$, et à la demande de Thiele, l'éminent calculateur M. N.-P. Bertelsen a donné une extension très considérable des petites tables de Stirling. Le dernier article du présent Mémoire donne le commencement des tables de M. Bertelsen.

1 Methodus Differentialis: sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Londres 1730.

2 Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. 13. Institutiones calculi differentialis, p. 485—486; Pétrograde 1755.

3 Histoire de l'Académie, année 1777, p. 99—122.

4 Philosophical Transactions 1814 I, p. 440—468, 1816 I, p. 25—45.

5 Mathematische Abhandlungen, p. 63—93. Altona 1822.

6 Journal de Crelle, t. 44, p. 344—355, 1852.

7 Interpolationsrechnung, p. 31—32. Leipsic 1909.

Les nombres de Stirling étant intimement liés aux nombres de Bernoulli, j'étudie depuis plus de trente ans, ces nombres compliqués, sur lesquels j'ai publié plusieurs notes, savoir:

Om Potenssummer af hele Tal.[1]

Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling.[2]

Note sur quelques applications analytiques des polynomes de Stirling.[3]

Sur les séries de fonctions de Stirling.[4]

Or, ayant mené à une terminaison relative mes recherches systématiques sur les nombres de Bernoulli[5], je me suis décidé à revenir aux nombres de Stirling, beaucoup plus difficiles encore.

En effet, l'étude systématique des nombres $C_{n+1}^p$ et $\mathfrak{C}_{n+1}^p$, le rang $p$ étant supposé fixe, est réduite à l'étude d'un seul polynome $\Phi_{2p}(x)$ du degré $2p$ par rapport à $x$, polynome qui se présente sous la forme

$$\Phi_{2p}(x) = (x+1)x(x-1)\ldots(x-p+1)\psi_{p-1}(x),$$

où $\psi_{p-1}(x)$ est un polynome entier du degré $p-1$ par rapport à $x$. C'est-à-dire que la détermination des nombres de Stirling du rang $p$ renferme implicitement la détermination d'une factorielle de l'ordre $p$, inférieur à l'ordre des $C_{n+1}^p$ et $\mathfrak{C}_{n+1}^p$.

Quant aux polynomes $\psi_p(x)$, que je désigne comme les polynomes de Stirling, soit

$$\psi_p(x) = \alpha_{p,0}x^p + \alpha_{p,1}x^{p-1} + \ldots + \alpha_{p,r}x^{p-r} + \ldots + \alpha_{p,p},$$

[1] Nyt Tidsskrift for Mathematik, t. 4 B, p. 1—10; 1893.

[2] Annali di Matematica, 3e série, t. 10, p. 287—318; 1904.

[3] Id. p. 319—325; 1904.

[4] Annali di Matematica, 3e série, t. 12, p. 101—112; 1905.

[5] La guerre a retardé la publication de mon livre: *Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli.* Dans le Mémoire présent je cite plusieurs fois ce Traité, en indiquant les numéros des articles dont il s'agit.

et soit $r$ un nombre fixe, il existe un polynome $\beta_{2r}(x)$ du degré $2r$ par rapport à $x$, tel que

$$\alpha_{p,r} = \frac{\beta_{2r}(p)}{(p+1)!\,2^{p+1}}, \qquad 0 \leqq r \leqq p,$$

et ce polynome $\beta_{2r}(x)$ se présente sous la forme

$$\beta_{2r}(x) = x(x-1)\ldots(x-r+1)\,\sigma_r(x),$$

où $\sigma_r(x)$ est un nouveau polynome entier du degré $r$ par rapport à $x$. C'est-à-dire que la détermination du coefficient $\beta_{p,r}$ exige aussi la détermination d'une factorielle, étant de l'ordre $r$ inférieur à $p$.

Ces remarques montrent clairement que la nature analytique des nombres de Stirling est très compliquée.

De plus, j'ai donné une théorie élémentaire des nombres de Bernoulli, en les débarrassant entièrement des éléments transcendentaux, mais je n'ai pas réussi à résoudre ce même problème relativement aux nombres de Stirling. C'est pourquoi j'ai été obligé d'appliquer, dans le présent Mémoire, et une méthode élémentaire et une méthode transcendante.

Quant au Mémoire que j'ai l'honneur de présenter ici à notre Académie, il contient tous les résultats donnés dans mes publications susdites, souvent dans une forme généralisée, et beaucoup d'autres. Or, je ne mentionne pas les séries de factorielles de Stirling, données dans mon Traité de la fonction gamma[1], et c'est la même chose pour la belle généralisation de ces formules, savoir

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(y-x+1)\,(y-x)^x} = \frac{\Gamma(x)}{y} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\Gamma(x+s+1)\,\psi_{s-1}(x+s-1)}{y(y+1)\ldots(y+s)},$$

[1] Handbuch der Theorie der Gammafunktion, pp. 259, 285—288; Leipsic 1906.

où les $\psi_{s-1}(x+s-1)$ sont les polynomes de Stirling et où il faut supposer

$$\Re(y) > \Re(x) > -1.$$

Cette formule est indiquée par M. Rutgers[1], mais sa démonstration, une intégration terme à terme d'une série infinie, n'est malheureusement pas rigoureuse, et je n'ai pas réussi à la compléter. De plus, il ne me semble pas sûr que les conditions indiquées par M. Rutgers soient exactes.

En appliquant, dans les articles VIII, IX, X du présent Mémoire, des séries de Lagrange, dans lesquelles les nombres de Stirling jouent un rôle fondamental, je saisis l'occasion d'attirer l'attention des géomètres sur une fausseté littéraire qui rattache le nom de Bürmann aux séries de la forme

$$\text{(a)} \quad f(x) = A_0 + A_1\varphi(x) + A_2\left(\varphi(x)\right)^2 + \ldots + A_n\left(\varphi(x)\right)^n + \ldots,$$

appliquables aux environs de $x = a$, zéro simple de la fonction analytique $\varphi(x)$, et dont les coefficients sont à déterminer par les expressions

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} A_0 = f(a) \\ A_n = \dfrac{1}{n!} D_x^{n-1}\left[\left(\dfrac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n f'(x)\right]_{x=a}. \end{cases}$$

La source de cette fausseté littéraire est peut-être à chercher dans une citation trompeuse de Lacroix[2], citation qui fait croire que Bürmann ait publié un mémoire dans le tome II, p. 15 des Mémoires de l'Institut.

Or, le tome susdit (de l'an IV) ne contient qu'une recension, faite par Lagrange et soussignée également par

[1] Nieuw archief voor Wiskunde, 3e série, t. 8, p. 106; 1907.

[2] Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. III, p. XXI (Table), 2e édition, Paris 1819.

Legendre, de deux mémoires manuscrits que Bürmann a envoyés à l'Institut. Et, dans la page citée par Lacroix, on lit textuellement:

»Cette formule [savoir une formule équivalente à (a), suppléée par les expressions (b) des coefficients] étant très générale et susceptible d'un grand nombre d'applications utiles dans la théorie des fonctions, nous avons cherché si elle ne s'étoit pas présentée déjà aux regards des analystes: nous avons bientôt reconnu qu'elle ne différoit pas essentiellement du théorème donné par Lagrange dans les *Mémoires de Berlin*, année 1769 [1768?]. Nous avons trouvé également qu'elle pouvoit se déduire très aisément d'un théorème que le citoyen Laplace a donné sans démonstration dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* année 1777. Il résulte de là que la formule de M. Bürmann ne peut être regardée comme une découverte nouvelle en analyse; mais on ne sauroit refuser à l'auteur la justice de reconnoître qu'il est parvenu à ce théorème par ses propres recherches, et qu'il en a donné une démonstration nouvelle et ingénieuse.«

Quant à la citation inexacte de Lacroix, je remarque expressément que cet auteur désigne[1] la formule en question comme théorème de Lagrange.

Examinons maintenant la littérature plus ancienne que le Traité susdit de Lacroix.

Klügel, dans son Dictionnaire Mathématique[2] ne mentionne pas Bürmann, mais indique correctement que Lagrange[3] a démontré le théorème général:

[1] Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. I, p. IV (Table), 2e édition, Paris 1810.

[2] Mathematisches Handwörterbuch, t. I, p. 625—636; Leipsic 1802.

[3] Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1768, p. 275; voir aussi année 1769, p. 207.

Soit $x$ une racine quelconque de l'équation

$$a = x - \psi(x), \tag{c}$$

où $\psi(x)$ est une fonction »quelconque« de $x$, et soit $f(x)$ une autre fonction »quelconque« de $x$, il résulte le développement

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!} D_x^{n-1} \left[ \left(\psi(x)\right)^n f'(x) \right]_{x=a}. \tag{d}$$

De plus, KLÜGEL[1] remarque, qu'en substituant, dans (c), $y\,\psi(x)$ au lieu de $x$, savoir en étudiant cette autre équation

$$a = x - y\,\psi(x), \tag{e}$$

on aura plus généralement

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{y^n}{n!} D_x^{n-1} \left[ \left(\psi(x)\right)^n f'(x) \right]_{x=a}, \tag{f}$$

généralisation immédiate qui était donnée déjà par LAGRANGE.[2]

Soit maintenant $y = \varphi(x)$, ce qui donnera, en vertu de (e),

$$\psi(x) = \frac{x - a}{\varphi(x)},$$

on voit que la formule (a) est une conséquence immédiate de (f), la détermination (b) des coefficients $A_n$ y comprise.

Remarquons encore que J.-W. PFAFF[3] en reproduisant la dernière démonstration de LAGRANGE, ne mentionne pas BÜRMANN et c'est la même chose pour GRUNERT, dans le second volume du Dictionnaire Mathématique[4], et pour

[1] Loc. cit. p. 625.

[2] Théorie des fonctions analytiques, p. 101—105; Paris, an V (1797).

[3] Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von Carl Friedrich Hindenburg. Zweyte Sammlung, p. 195—229; Leipsic 1800.

[4] Mathematisches Handwörterbuch, Supplement Bd. I, pp. 55, 80; Leipsic 1833.

Puiseux[1], dans son Mémoire fondamental sur les fonctions algébriques.

C. Ramus[2], l'érudit professeur danois, indique, sans donner des citations, mais évidemment inspiré par Lacroix, que les formules (b) sont dues à Bürmann, ce qui est faux, mais Ramus dit expressément, que la série (a) n'est autre chose qu'une transformation immédiate de celle de Lagrange.

La désignation: *série de Bürmann* est appliqué eexplicitement par Schlömilch[3] qui, à cette occasion, fait la remarque suivante:

»Die Formeln 62), 63) und 64) [savoir les formules (a) et (b)] wurden 1796 von Bürmann (in Mannheim) auf anderem Wege entwickelt (Mémoire de l'Institut, tome II, pag. 14) jedoch, dem damaligen Standpunkte der Wissenschaft gemäss, ohne Angabe der Gültigkeitsbedingungen für die Gleichung 62) [savoir la formule (a)]. Neuerdings ist Puiseux (Liouville's Journal Bd. 15) etc.«

On voit que cette remarque du savant géomètre saxon est très étourdie, et il est évident que Schlömilch n'a jamais vu la page 14 du tome II des *Mémoires de l'Institut!*

Quant à l'inexactitude (certaine, mais pas mise en pleine lumière parce que le mémoire n'est pas publié) des conditions de Bürmann, on est tenté de désigner comme des fantaisies sa propre démonstration. Et, sous ce point de vue, c'est très curieux, ce me semble, que Schlömilch mentionne la démonstration rigoureuse et moderne de Puiseux. Or cette démonstration étant désignée comme récente, il est évident que la remarque de Schlömilch est écrite peu de temps après 1850.

1 Journal de Liouville, t. 15, p. 365—480, 1850 (voir p. 380—383).

2 Algebra og Functionslære, p. 108—112; Copenhague 1840.

3 Compendium der höheren Analysis, t. II, p. 102 (3e édition); Brunswick 1879.

Curieusement, KLÜGEL remarque que CONDORCET, dans l'Encyclopédie Méthodique (article séries), attribue à d'ALEMBERT la série de LAGRANGE.

Quant à BÜRMANN, désigné, dans la recension susdite, comme professeur de commerce à Manheim, je sais seulement qu'il a publié, dans l'Archiv für reine und angewandte Mathematik, t. II, un mémoire intitulé: *Berechnung des Kreises*.

Copenhague, le 26 juin 1919.

NIELS NIELSEN.

## PREMIÈRE PARTIE

## Les nombres de Stirling.

### I. — Définitions et propriétés fondamentales.

Soit $n$ un nombre positif, les factorielles des ordres $\pm n$ sont à définir comme suit

$$(1)\quad \begin{cases} \omega_n(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) \\ \omega_{-n}(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}; \end{cases}$$

de plus, nous posons

$$(1 \text{ bis})\qquad \omega_0(x) = 1.$$

Études tout d'abord la factorielle d'un ordre positif, puis posons

$$(2)\quad \begin{cases} \omega_{n+1}(x) = \\ C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n + \ldots + C_{n+1}^p x^{n-p+1} + \ldots + C_{n+1}^n x, \end{cases}$$

les positifs entiers $C_{n+1}^p$ sont désignés comme les coefficients de factorielle, ou les nombres de Stirling de première espèce, de l'ordre $n+1$. Nous aurons évidemment

$$(3)\quad \begin{cases} C_n^0 = 1, \qquad n \geqq 0 \\ C_{n+1}^n = n!, \end{cases}$$

tandis que le coefficient général $C_{n+1}^p$ est la somme des produits formés de $p$ facteurs inégaux pris parmi les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Quant aux factorielles d'un ordre négatif, je dis que nous aurons un développement de la forme

$$(4) \qquad \omega_{-n-1}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_{n+1}^s}{x^{n+s+1}}, \qquad |x| > n,$$

où les coefficients $\mathfrak{C}_{n+1}^r$, les coefficients de factorielle, ou les nombres de Stirling de seconde espèce, de l'ordre $-n-1$, sont déterminés par les expressions

$$(5) \qquad \mathfrak{C}_{n+1}^r = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^{n+r}.$$

En effet, prenons pour point de départ l'identité evidente

$$(6) \qquad \frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{x+s} \binom{n}{s},$$

puis appliquons la série géométrique

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{1}{x+s} = \frac{1}{x} - \frac{s}{x^2} + \frac{s^2}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^m s^m}{x^{m+1}} + \ldots,$$

valable pour $1 \leqq s \leqq n$, pourvu que $|x| > n$, le coefficient de la puissance

$$\frac{(-1)^m}{x^{m+1}},$$

qui figure dans l'expression, obtenue à l'aide de (6), deviendra

$$(7) \qquad \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^m.$$

Cela posé, les valeurs limites évidentes

$$(7 \text{ bis}) \quad \lim_{|x|=\infty} \left(x^m \omega_{-n-1}(x)\right) = 0, \qquad 1 \leqq m \leqq n,$$

montrent clairement que l'expression (7) s'évanouira pour $1 \leqq m \leqq n$, ce qui donnera immédiatement la formule (4). Remarquons que la valeur limite (7 bis) a, pour $m = n+1$, la valeur 1, nous aurons de plus

$$(8) \qquad \mathfrak{C}_n^0 = 1, \qquad n \geqq 0.$$

Curieusement, M. UNFERDINGER[1] désigne comme théorème de LEGENDRE cette dernière formule; or, ce résultat numérique est certainement plus ancien.

Soit ensuite $\alpha$ un nombre complexe quelconque, nous posons plus généralement

$$(9)\begin{cases} \omega_{n+1}(x+\alpha) = \\ = C_{n+1}^{0}(\alpha)x^{n+1} + C_{n+1}^{1}(\alpha)x^{n} + \ldots + C_{n+1}^{n}(\alpha)x + C_{n+1}^{n+1}(\alpha), \end{cases}$$

$$(9\text{ bis})\qquad \omega_{-n-1}(x+\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^{s}\mathfrak{C}_{n+1}^{s}(\alpha)}{x^{n+s+1}},$$

où il faut supposer, dans cette dernière formule,

$$|x| > |\alpha+s|, \qquad 0 \leqq s \leqq n,$$

il résulte évidemment

$$(10)\qquad \begin{cases} C_{n+1}^{r}(0) = C_{n+1}^{r}, & 0 \leqq r \leqq n, \\ \mathfrak{C}_{n+1}^{r}(0) = \mathfrak{C}_{n+1}^{r}, & r \geqq 0. \end{cases}$$

Quant au coefficient général $C_{n+1}^{p}(\alpha)$, il est la somme des produits de $p$ facteurs inégaux pris parmi les nombres

$$\alpha,\ \alpha+1,\ \alpha+2,\ \ldots,\ \alpha+n$$

ce qui donnera particulièrement

$$(11)\qquad C_{n+1}^{n+1}(\alpha) = \omega_{n+1}(\alpha).$$

Appliquons ensuite les séries géométriques

$$\frac{1}{x+\alpha+s} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha+s}{x^2} + \frac{(\alpha+s)^2}{x^3} \ldots, \qquad |x| \geqq |\alpha+s|,$$

nous aurons de même

$$(12)\qquad \mathfrak{C}_{n+1}^{p}(\alpha) = \frac{1}{n!}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{s}\binom{n}{s}(\alpha+n-s)^{n+p},$$

[1] Wiener Sitzungsberichte t. 67 II, p. 365; 1873.

de sorte que $\mathfrak{C}_{n+1}^{p}(\alpha)$ n'est, abstraction faite d'un simple facteur, autre chose que la $n^{\text{ième}}$ différence de $(\alpha+n)^{n+p}$, savoir

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{p}(\alpha) = \frac{1}{n!}\cdot \Delta^n (\alpha+n)^{n+p}. \tag{12 bis}$$

Cela posé, ordonnons, d'après des puissances descendantes de $\alpha$, le second membre de (12), la formule binomiale donnera

$$\mathfrak{C}_{n+1}^{r}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{n+r}{r-s} \mathfrak{C}_{n+1}^{s}\, \alpha^{r-s}. \tag{13}$$

Quant aux coefficients $C_{n+1}^{r}(\alpha)$, appliquons l'identité

$$\omega_{n+1}(x+\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^{s}(x+\alpha)^{n-s+1},$$

tirée directement de la définition (2), la même méthode donnera

$$C_{n+1}^{r}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{n-s+1}{r-s} C_{n+1}^{s}\, \alpha^{r-s}. \tag{13 bis}$$

On voit que la formule (11) détermine les coefficients $\mathfrak{C}_{n+1}^{r}(\alpha)$ par des expressions explicites, tandis que les $C_{n+1}^{r}(\alpha)$ ne sont définis que par des méthodes combinatoires. Or, il faut ajouter que les expressions explicites susdites sont peu commodes pour un calcul direct des $\mathfrak{C}_{n+1}^{r}(\alpha)$. C'est pourquoi nous avons à chercher des formules récursives qui nous permettent de calculer successivement et les $C_{n+1}^{r}(\alpha)$ et les $\mathfrak{C}_{n+1}^{r}(\alpha)$.

A cet effet, appliquons les identités évidentes

$$(x+\alpha+n)\,\omega_n(x+\alpha) = \omega_{n+1}(x+\alpha)$$
$$(x+\alpha+n)\,\omega_{-n-1}(x+\alpha) = \omega_{-n}(x+\alpha),$$

puis cherchons, aux deux membres de ces formules, le coefficient de la puissance $x^{n-r+1}$ respectivement $x^{-n-r}$, il résulte, pour les $C_{n+1}^r(\alpha)$,

$$(14)\quad \begin{cases} C_{n+1}^r(\alpha) = C_n^r(\alpha) + (\alpha+n)\,C_n^{r-1}(\alpha), \qquad 1 \leqq r \leqq n \\ C_{n+1}^0(\alpha) = C_n^0(\alpha) = 1 \\ C_{n+1}^{n+1}(\alpha) = (\alpha+n)\,C_n^n(\alpha) = \omega_{n+1}(\alpha), \end{cases}$$

et pour les $\mathfrak{C}_{n+1}^r(\alpha)$

$$(14\text{ bis})\begin{cases} \mathfrak{C}_{n+1}^0(\alpha) = \mathfrak{C}_n^0(\alpha) = 1 \\ \quad \mathfrak{C}_n^r(\alpha) = \mathfrak{C}_{n+1}^r(\alpha) - (\alpha+n)\,\mathfrak{C}_{n+1}^{r-1}(\alpha)\,, \qquad r \geqq 1\,, \end{cases}$$

d'où, en supposant $\alpha = 0$,

$$(15)\quad \begin{cases} C_{n+1}^r = C_n^r + n\,C_n^{r-1}\,, \qquad 1 \leqq r \leqq n-1 \\ C_{n+1}^n = n\,C_n^{n-1} = n! \\ C_{n+1}^0 = C_n^0 = 1\,,\quad n > 0\,;\quad C_1^r = 0\,,\quad r \geqq 1\,, \end{cases}$$

et il est évident que la première de ces formules, suppléée par la valeur initiale, indiquée dans la dernière, détermine successivement tous les nombres de Stirling de première espèce.

Quant aux nombres $\mathfrak{C}_{n+1}^r$, il résulte de même

$$(15\text{ bis})\begin{cases} \mathfrak{C}_n^r = \mathfrak{C}_{n+1}^r - n\,\mathfrak{C}_{n+1}^{r-1}, \qquad r \geqq 1 \\ \mathfrak{C}_{n+1}^0 = \mathfrak{C}_n^0 = 1\,,\quad n \geqq 0\,;\quad \mathfrak{C}_1^r = 0\,,\quad r \geqq 1\,, \end{cases}$$

et il est évident que ces formules déterminent successivement tous les nombres de Stirling de seconde espèce, ce qui donnera la proposition suivante:

I. Les nombres de Stirling de seconde espèce, savoir les $\mathfrak{C}_{n+1}^r$, sont pour $n \geqq 1$, des positifs entiers.

## II.—Formules récursives générales.

La définition même de la faculté d'un ordre quelconque nous permet de développer une suite de formules récursives beaucoup plus générales que les précédentes.

En premier lieu, prenons pour point de départ les identités évidentes

$$\frac{1}{x+\alpha+n}\cdot\omega_{n+1}(x+\alpha) = \omega_n(x+\alpha)$$

$$\frac{1}{x+\alpha+n}\cdot\omega_{-n}(x+\alpha) = \omega_{-n-1}(x+\alpha)\,,$$

puis appliquons la série géométrique

$$\frac{1}{x+\alpha+n} = \frac{1}{x} - \frac{\alpha+n}{x^2} + \frac{(\alpha+n)^2}{x^3} - \dots, \quad |x| > |\alpha+n|,$$

nous aurons respectivement

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s(\alpha+n)^s C_{n+1}^{r-s}(\alpha) = C_n^r(\alpha)\,, \quad 0 \leqq r \leqq n,$$

$$(1\text{ bis}) \qquad \sum_{s=0}^{s=r}(\alpha+n)^s \mathfrak{C}_n^{r-s}(\alpha) = \mathfrak{C}_{n+1}^r(\alpha)\,, \qquad r \geqq 0.$$

On voit que la dernière de ces deux formules donnera, pour $\alpha = 0$, une nouvelle démonstration de la proposition I de l'article précédent concernant la nature des nombres de Stirling de seconde espèce.

Quant à la formule (1), elle peut être suppléée par cette autre

$$(2) \qquad \sum_{s=0}^{s=n+1}(-1)^s(\alpha+n)^s C_{n+1}^{n-s+1}(\alpha) = 0\,,$$

obtenue en cherchant, dans le premier des produits susdits, le coefficient d'une puissance négative de $x$,

D'autres formules récursives plus importantes sont des conséquences immédiates des deux identités évidentes

$$\omega_{n+p+1}(x)\,\omega_{-n-1}(x) = \omega_p(x+n+1)$$

$$\omega_{-n-p-1}(x)\,\omega_{n+1}(x) = \omega_{-p}(x+n+1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(\sum_{s=0}^{s=n+p} C^s_{n+p+1}\, x^{n+p-s+1}\right)\cdot\left(\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\mathfrak{C}^s_{n+1}}{x^{n+s+1}}\right) = \sum_{s=0}^{s=p-1} C^s_p(n+1)\, x^{p-s}$$

$$\left(\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\mathfrak{C}^s_{n+p+1}}{x^{n+p+s+1}}\right)\cdot\left(\sum_{s=0}^{s=n} C^s_{n+1}\, x^{n-s+1}\right) = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\mathfrak{C}^s_p(n+1)}{x^{p+s}}.$$

Cherchons maintenant, aux deux membres de ces formules, le coefficient de la puissance $x^{p-r}$ respectivement $x^{-p-r}$, les seconds membres donnent $C^r_p(n+1)$, et $(-1)^r\,\mathfrak{C}^r_p(n+1)$, d'où, en vertu des formules, obtenues des (13) et (13 bis) de l'article précédent, en y posant $n=p-1$, $\alpha = n+1$,

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\, C^{r-s}_{n+p+1}\,\mathfrak{C}^s_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=r}\binom{p-s}{r-s}(n+1)^{r-s}\, C^s_p \tag{3}$$

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\,\mathfrak{C}^{r-s}_{n+p+1}\, C^s_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=r}\binom{p+r-1}{r-s}(n+1)^{r-s}\,\mathfrak{C}^s_p. \tag{3 bis}$$

Dans ces deux formules il faut, pour des valeurs plus grandes de $r$, supprimer les termes contenant des coefficients $C^m_q$, dans lesquels $m \geqq q$. Soit particulièrement $n=0$, les premiers membres des deux formules en question se réduisent à leur premier terme, ce qui donnera respectivement

$$C^r_{p+1} = \sum_{s=0}^{s=r}\binom{p-s}{r-s} C^s_p \tag{4}$$

$$\mathfrak{C}^r_{p+1} = \sum_{s=0}^{s=r}\binom{p+r-1}{r-s}\mathfrak{C}^s_p. \tag{4 bis}$$

Une autre formule essentielle peut être déduite de (3) en y posant $r > p$, de sorte que le second membre de cette formule s'évanouira, d'où, en remplaçant $n+p$ par $m$,

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \, C_{m+1}^{r-s} \, \mathfrak{C}_{n+1}^{s} = 0\,, \qquad r > m-n > 0\,,$$

tandis que l'hypothèse $r = p$, savoir $r = m - n$, donnera

$$(5\text{ bis})\qquad \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \, C_{n+r+1}^{r-s} \, \mathfrak{C}_{n+1}^{s} = \omega_r(n+1) = \frac{(n+r)!}{n!}.$$

Revenons maintenant aux développements (2) et (4) de l'article précédent, puis posons $x-1$ au lieu de $x$, nous aurons, en divisant, respectivement multipliant par $x-1$,

$$\omega_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^{s} \, (x-1)^{n-s}$$

$$\omega_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \, \mathfrak{C}_{n+1}^{s}}{(x-1)^{n+s}}\,,$$

d'où, en cherchant, aux deux membres de ces formules, le coefficient de la puissance $x^{n-r}$ respectivement $x^{-n-r}$,

$$(6)\qquad C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n-r+s}{s} C_{n+1}^{r-s}$$

$$(6\text{ bis})\qquad \mathfrak{C}_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n+r-s}{s} \mathfrak{C}_{n+1}^{r-s}\,,$$

formules qui représentent les inversions des formules (4).

Posons ensuite, dans (6) et (6 bis), $r+1$ au lieu de $r$, puis éliminons, en vertu des formules récursives (15) et (15 bis) de l'article précédent, $C_{n+1}^{r+1}$ respectivement $\mathfrak{C}_{n+1}^{r+1}$, il résulte

$$(7) \qquad n\,C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n-r+s}{s+1} C_{n+1}^{r-s}$$

$$(7\text{ bis}) \qquad n\,\mathfrak{C}_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n+r-s}{s+1} \mathfrak{C}_{n+1}^{r-s},$$

tandis que la même méthode donnera, en vertu de (4),

$$(8) \qquad n\,C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{n-s}{r-s+1} C_n^s$$

$$(8\text{ bis}) \qquad n\,\mathfrak{C}_{n+1}^r = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{n+r}{r-s+1} \mathfrak{C}_n^s,$$

formules qui représentent les inversions des formules (7).

Dans l'article XII nous avons à donner des applications intéressantes des développements numériques que nous venons d'établir ici.

## III.—Applications élémentaires.

Les formules numériques, développées dans l'article précédent, conduisent immédiatement à des applications intéressantes des nombres de Stirling.

En premier lieu, prenons pour point de départ la formule (5) de l'article susdit, il est très facile de démontrer le théorème:

I. Cherchons, des équations linéaires

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= C_1^0\,x_1, \\ y_2 &= C_2^0\,x_2 + C_2^1\,x_1, \\ y_3 &= C_3^0\,x_3 + C_3^1\,x_2 + C_3^2\,x_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= C_n^0\,x_n + C_n^1\,x_{n-1} + C_n^2\,x_{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}\,x_1, \end{aligned} \right.$$

les quantités $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$, il résulte

$$
(1 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l}
x_1 = \mathfrak{C}_2^0 \, y_1 \\
x_2 = \mathfrak{C}_3^0 \, y_2 - \mathfrak{C}_2^1 \, y_1 \\
x_3 = \mathfrak{C}_4^0 \, y_3 - \mathfrak{C}_3^1 \, y_2 + \mathfrak{C}_2^2 \, y_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n = \mathfrak{C}_{n+1}^0 \, y_n - \mathfrak{C}_n^1 \, y_{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} \mathfrak{C}_2^{n-1} \, y_1 ,
\end{array} \right.
$$

et inversement.

En effet, introduisons, dans la formule générale (1), les expressions indiquées dans (1 bis), la formule susdite de l'article précédent donnera une identité. De même, introduisons, dans la formule générale (1 bis) les expressions indiquées dans (1), nous aurons aussi une identité.

Quant aux nombres $\mathfrak{C}_{n+1}^r$, il est facile de démontrer le théorème:

II. Développons, d'après la formule polynomiale, l'expression

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)^n ,$$

où $n$ et $p$ désignent des positifs entiers, puis désignons par $\Omega_{p,n}$ la somme des coefficients polynomiaux qui correspondent aux termes divisibles par le produit $a_1 \, a_2 \dots a_p$, nous aurons généralement

$$\Omega_{p,n} = p! \, \mathfrak{C}_{p+1}^{n-p} . \tag{2}$$

Soit particulièrement $p = 2$, on aura directement

$$\Omega_{2,n} = 2^n - 2 = 2! \, \mathfrak{C}_3^{n-2} ;$$

appliquons ensuite l'identité évidente

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p)^n = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} a_1^s \, (a_2 + a_3 + \dots + a_p)^{n-s},$$

il résulte, pour les $\Omega_{p,n}$, la formule récursive

$$\Omega_{p,n} = \sum_{s=1}^{s=n-p+1} \binom{n}{s} \Omega_{p-1,n-s},$$

et la conclusion de $n$ à $n+1$ est une conséquence immédiate de la formule (8 bis) de l'article précédent.

Dans la formule (12 bis) de l'article I nous avons développé la différence $\Delta^n (x+n)^p$ d'après des puissances descendantes de $x$; le calcul aux différences finies donnera aussi facilement cette autre formule

$$(3) \qquad x^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \mathfrak{C}_{n-s+1}^{s} \omega_{n-s}(x)$$

qui peut être considérée comme l'inversion de la définition de $\omega_n(x)$, savoir la formule (2) de l'article I. Dans l'article IX nous avons à déduire, d'un autre point de vue, le développement (3).

## IV.—Introduction d'une variable continue.

Remarquons que l'équation algébrique du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré

$$\omega_{n+1}(x) = x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n + C_{n+1}^2 x^{n-1} + \ldots + C_{n+1}^n x = 0$$

a les $n+1$ racines

$$0, -1, -2, -3, \ldots, -n,$$

puis posons pour abréger

$$(1) \qquad S_p(n) = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

il résulte, en vertu des formules de Newton,

$$(2) \quad \sum_{r=0}^{r=p-1} (-1)^r C_{n+1}^r S_{p-r}(n) + (-1)^p p C_{n+1}^p = 0, \qquad 1 \leqq p \leqq n,$$

formules qui nous permettent d'introduire, dans l'étude des nombres de Stirling, une variable continue au lieu du positif entier $n$.

A cet effet, posons

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi_1(x) = x \\ \Phi_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} \\ \Phi_p(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^{p-1}}{2} + \displaystyle\sum_{s=1}^{\leqq \frac{p-1}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{p} \binom{p}{2s} x^{p-2s}, \end{cases}$$

où les $B_m$ désignent les nombres de Bernoulli, tandis que $x$ est une variable complexe quelconque, Jacques Bernoulli[1] a indiqué la formule générale

$$(4)\qquad S_{p-1}(n) = \Phi_p(n), \quad p \geqq 2,$$

où $n$ désigne un positif entier quelconque.

Cela posé, étudions le système d'équations linéaires

$$(5)\qquad \sum_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \Phi_{p-s+1}(x)\, \Psi_{2s}(x) + (-1)^p p\, \Psi_{2p}(x) = 0,$$

où nous supposons

$$(5 \text{ bis})\qquad \Psi_0(x) = 1,$$

il est évident que ces équations deviennent identiques aux formules numériques (2), si nous posons $x = n$, où $n$ est un positif entier, égal à $p$ au moins. Or, je dis que $\Psi_{2p}(x)$, déterminé par les équations (5), est un polynome entier du degré $2p$ par rapport à $x$.

En effet, supposons vraie cette propriété de $\Psi_{2r}(x)$ pour $1 \leqq r \leqq p-1$, il est évident que le terme

$$(-1)^{p-1} \Phi_2(x)\, \Psi_{2p-2}(x)$$

est un polynome entier du degré $2p$ par rapport à $x$,

[1] Ars conjectandi, p. 97; Bâle 1713.

tandis que tous les autres termes figurant sous le signe sommatoire au premier membre de la formule susdite sont d'un degré inférieur à $2p$.

De plus, nous aurons, en vertu de (5),

$$\Psi_{2p}(0) = 0\,, \quad p \geqq 1. \tag{6}$$

Cela posé, il est facile de démontrer une suite de théorèmes fondamentaux concernant les polynomes $\Psi_{2p}(x)$, savoir:

I. La suite des polynomes $\Psi_{2p}(x)$ est une généralisation des nombres de Stirling et de première et de seconde espèce, parce que nous aurons, en désignant par $n$ un positif entier,

$$\Psi_{2p}(n) = C_{n+1}^{p}\,, \quad n \geqq p,\ p \geqq 0, \tag{7}$$

$$\Psi_{2p}(-n-1) = \mathfrak{C}_{n+1}^{p}\,, \quad p \geqq 0. \tag{7 bis}$$

La première de ces deux formules est évidente, parce que les deux systèmes d'équations (5) et (2) deviennent identiques pour $x = n \geqq p \geqq 1$. Quant à la seconde des formules en question, je dis que les polynomes $\Psi_{2p}(x)$ satisfont à l'équation fonctionnelle:

$$\Psi_{2p}(x+1) = \Psi_{2p}(x) + (x+1)\Psi_{2p-2}(x)\,, \quad p \geqq 1. \tag{8}$$

En effet, soit $x$ égal au positif entier $n \geqq p$, l'équation (8) n'est, en vertu de (7), autre chose que la formule récursive (15) de l'article I; c'est-à-dire que l'équation algébrique (8), du degré $2p$ au plus, admet une infinité de racines inégales.

Posons ensuite, dans l'identité (8), $-x-1$ au lieu de $x$, il résulte

$$\Psi_{2p}(-x) = \Psi_{2p}(-x-1) - x\Psi_{2p-2}(-x-1)\,,$$

ce qui donnera immédiatement, en vertu de (15 bis) de l'article I, la formule (7 bis), formule qui est évidente pour $p = 0$.

II. Les équations fonctionnelles (8), suppléées par la valeur initiale $\Psi_0(x) = 1$ et par la condition $\Psi_{2p}(0) = 0$, déterminent parfaitement la suite des polynomes

$$\Psi_0(x),\ \Psi_2(x),\ \Psi_4(x),\ \ldots,\ \Psi_{2n}(x),\ \ldots,$$

définis par les formules (5).

En effet, supposons donné le polynome $\Psi_{2p-2}(x)$, la formule (8) est une équation linéaire aux différences finies, et cette équation du premier ordre détermine le polynome $\Psi_{2p}(x)$, abstraction faite d'une constante additive, dont la valeur est déterminée par la condition $\Psi_{2p}(0) = 0$.

Dans ce qui suit nous avons à appliquer indistinctement les deux définitions que nous venons de donner pour les polynomes $\Psi_{2p}(x)$.

III. Les coefficients $a_{n,r}$ du polynome

$$(9)\quad \begin{cases} \Psi_{2n}(x) = a_{n,0}\, x^{2n} + a_{n,1}\, x^{2n-1} + \ldots + a_{n,p}\, x^{2n-p} + \ldots \\ \qquad\qquad + a_{n,2n-1}\, x \end{cases}$$

sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs ne contiennent que des facteurs premiers égaux à $n+1$ au plus.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la propriété bien connue des coefficients numériques du polynome $\Phi_m(x)$, savoir que ces coefficients sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs ne contiennent que des nombres premiers égaux à $m+1$ au plus,

Quant aux coefficients $a_{n,r}$ qui figurent au second membre de (9), introduisons, dans l'équation fonctionnelle (8), les expressions tirées de (9), puis cherchons, aux deux membres de la formule ainsi obtenue, les coefficients de la puissance $x^{2n-r-1}$, il résulte la formule récursive générale

(10) $$\sum_{s=0}^{s=r} \binom{2n-r+s}{s+1} a_{n,\,r-s} = a_{n-1,\,r} + a_{n-1,\,r-1},$$

où il faut supposer $r \geqq 1$, tandis que l'hypothèse $r = 0$ donnera

$$2n\,a_{n,\,0} = a_{n-1,\,0},$$

savoir

(11) $$a_{n,\,0} = \frac{1}{n!\,2^n}, \qquad n \geqq 0.$$

On voit que la formule récursive (10), tirée de la définition (8), est très compliquée pour le calcul successif des coefficients $a_{n,\,r}$. Quant à la définition (5), elle donnera immédiatement

(12) $$a_{2n+1,\,4n+1} = 0,$$

parce que tous les termes qui figurent sous le signe sommatoire sont divisibles par $x^2$. De plus, nous aurons

$$\Phi'_{2n+1}(0) + 2n\,\Psi'_{4n}(0) = 0,$$

ce qui donnera, en vertu de (3),

(12 bis) $$a_{2n,\,4n-1} = \frac{(-1)^n B_n}{2n}.$$

Déterminons encore le coefficient $a_{n,\,2n-2}$. A cet effet, posons, dans (5), $p = 2n+1$, la puissance $x^2$ provient seulement des quatre termes

$$\Phi_{2n+2}(x), \quad -\Psi_2(x)\,\Phi_{2n+1}(x), \quad \Phi_1(x)\,\Psi_{4n}(x),$$
$$-(2n+1)\,\Psi_{4n+2}(x),$$

tandis que tous les autres termes sont divisibles par $x^3$, ce qui donnera, en vertu de (12 bis),

(13) $$a_{2n+1,\,4n} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)\,B_n}{4n}.$$

Soit ensuite, dans (5), $p = 2n$, la puissance $x^2$ provient seulement des termes

$$2n\Psi_{4n}(x),\quad \Phi_{2n-s+1}(x)\Psi_{4s}(x),\qquad 1 \leqq s \leqq n-1,$$

tandis que tous les autres termes sont divisibles par $x^3$, de sorte que nous aurons, en vertu de (12 bis),

$$\text{(13 bis)}\qquad a_{2n,\,4n-2} = \frac{(-1)^n}{2n}\cdot\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{B_s B_{n-s}}{2s},\qquad n \geqq 2.$$

Remarquons que les polynomes $\Phi_m(x)$ satisfont à l'équation fonctionnelle

$$(-1)^m\Phi_m(-x-1) = \Phi_m(x),$$

il résulte, en vertu de (8) et (12), le théorème:

IV. Soit $n$ un positif entier, les polynomes $\Psi_{4n}(x)$ sont divisibles par $x(x+1)$, tandis que les polynomes $\Psi_{4n+2}(x)$ sont divisibles par $x^2(x+1)^2$.

De plus, introduisons, dans (5), $-x-1$ au lieu de $x$, il résulte

$$p\Psi_{2p}(-x-1) = \sum_{s=0}^{s=p-1}\Phi_{p-s+1}(x)\,\Psi_{2s}(-x-1),$$

d'où, en posant $x$ égal au positif entier $n$,

$$\text{(14)}\qquad p\mathfrak{C}_{n+1}^{p} = \sum_{r=0}^{r=p-1}\mathfrak{C}_{n+1}^{r}\,S_{p-r}(n),$$

formule qui est analogue à celle de Newton concernant les nombres de Stirling de première espèce.

Soit maintenant $p$ un nombre premier impair, on sait que les sommes de puissances $S_n(p)$ satisfont aux deux congruences

$$S_n(p) \equiv 0 \pmod{p},\qquad 1 \leqq n \leqq p-2$$

$$S_{2n+1}(p) \equiv 0 \pmod{p^2},\qquad 1 \leqq n \leqq \frac{p-3}{2},\ p \geqq 5,$$

ce qui donnera, en vertu de (2) et (14), le théorème:

V. Soit $p$ un nombre premier impair, les nombres de Stirling de première et de seconde espèce satisfont aux congruences

$$C_{p+1}^{n} \equiv \mathfrak{C}_{p+1}^{n} \equiv 0 \pmod{p},\ 1 \leqq n \leqq p-2, \tag{15}$$

$$C_{p+1}^{2n+1} \equiv \mathfrak{C}_{p+1}^{2n+1} \equiv 0 \pmod{p^2},\ 1 \leqq n \leqq \frac{p-3}{2},\ p \geqq 5. \tag{15 bis}$$

La première des congruences (15) n'est autre chose que le lemme célèbre de Lagrange[1], appliqué dans sa démonstration, la première connue, du théorème de Wilson. Quant à la première des congruences (15 bis), Wolstenholme[2] a connu le cas particulier qui correspond à $2n+1=p-3$, conséquence immédiate des congruences de Lagrange du reste[3]. Ignorant qui est l'inventeur de la congruence générale en question, je me permets de remarquer que j'ai trouvé cette congruence, il y a trente ans à peu près.[4]

Remarquons ensuite que les formules (2) et (14) donnent les congruences modulo $p$:

$$\frac{2n}{p} C_{p+1}^{2n} \equiv \frac{2n}{p} \mathfrak{C}_{p+1}^{2n} \equiv -\frac{1}{p} S_{2n}(p)$$

$$\frac{2n+1}{p^2} C_{p+1}^{2n+1} \equiv \frac{1}{p^2} S_{2n+1}(p) - \frac{1}{2p} S_{2n}(p) + \frac{1}{2p} C_{p+1}^{2n},$$

$$\frac{2n+1}{p^2} \mathfrak{C}_{p+1}^{2n+1} \equiv \frac{1}{p^2} S_{2n+1}(p) + \frac{1}{2p} S_{2n}(p) + \frac{1}{2p} \mathfrak{C}_{p+1}^{2n},$$

il résulte, en vertu des résultats bien connus,

[1] Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, t. 2 (1771), p. 125—137; 1773.

[2] Quarterly Journal of Mathematics, t. 5, p, 35—39; 1862.

[3] Voir mon Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli, article LXXXII.

[4] Nyt Tidsskrift for Mathematatik, t. 4 B, p. 1—10; 1893.

$$\frac{1}{p} S_{2n}(p) \equiv (-1)^{n-1} B_n \pmod{p}$$
$$\frac{1}{p^2} S_{2n+1}(p) \equiv (-1)^{n-1}\left(n+\frac{1}{2}\right) B_n \pmod{p},$$

cet autre théorème, supplémentaire au précédent:

VI. Soit $p$ un nombre premier, nous aurons les congruences modulo $p$:

$$(16) \qquad \frac{1}{p} C_{p+1}^{2n} \equiv -\frac{1}{p} \mathfrak{C}_{p+1}^{2n} \equiv \frac{(-1)^n B_n}{2n},$$

$$(16\text{ bis}) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{p^2} C_{p+1}^{2n+1} \equiv \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1) B_n}{4n}, \\[2ex] \dfrac{1}{p^2} \mathfrak{C}_{p+1}^{2n+1} \equiv \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1) B_n}{4n}; \end{cases}$$

où il faut supposer

$$1 \leqq n \leqq \frac{p-3}{2}.$$

Ces résultats concernant les nombres $C_{p+1}^m$ sont dus à M. Glaisher.[1] Les deux congruences évidentes

$$C_{p+1}^p \equiv \mathfrak{C}_{p+1}^p \equiv 0 \pmod{p}$$

nous conduisent à l'étude des deux nombres $C_p^{p-1}$ et $\mathfrak{C}_p^{p-1}$; remarquons que les nombres $C_p^n$, $\mathfrak{C}_p^n$ et $S_n(p-1)$ satisfont aux mêmes congruences que les $C_{p+1}^n$, $\mathfrak{C}_{p+1}^n$ et $S_n(p)$, les formules analogues à (2) et (14) donnent immédiatement

$$-(p-1) C_p^{p-1} \equiv S_{p-1}(p-1) \equiv (p-1)\mathfrak{C}_p^{p-1} \pmod{p^2},$$

de sorte que la congruence évidente

$$S_{p-1}(p-1) \equiv p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

donnera les deux autres

$$(17) \qquad C_p^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}, \qquad \mathfrak{C}_p^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

dont la première n'est autre chose que le théorème de Wilson.

[1] Quarterly Journal of Mathematics, t. 31, p. 321—353; 1900.

Posons ensuite

(18) $\quad C_p^{p-1} = -1 + p\, W_p, \quad \mathfrak{C}_p^{p-1} = 1 + p\, V_p,$

les $W_p$ et les $V_p$ sont des nombres entiers, et la congruence

$$S_p(p-1) \equiv (-1)^{n-1} B_n\, p \pmod{p^3}, \quad p = 2n,$$

donnera après un simple calcul

(19) $\quad W_p \equiv -V_p \equiv (-1)^{n-1} B_n + \frac{1}{p} - 1 \pmod{p}.$

La congruence concernant le nombre $W_p$, le quotient de Wilson, est également due à M. Glaisher[1] et retrouvée par M. Lerch.[2]

Dans mes recherches sur les résidus quadratiques[3] j'ai donné des analogies aux congruences que nous venons d'étudier ici.

## V. — Les polynomes de Stirling.

Le calcul direct des coefficients du polynome $\Psi_{2n}(x)$ étant très compliqué, nous avons à étudier, d'un autre point de vue, les polynomes en question.

A cet effet, revenons à l'équation fonctionnelle (8) de l'article précédent, savoir

(1) $\quad \Psi_{2n}(x+1) = \Psi_{2n}(x) + (x+1)\,\Psi_{2n-2}(x), \qquad n \geqq 1,$

suppléée par les conditions ultérieures

(1 bis) $\qquad \Psi_0(x) = 1, \quad \Psi_{2n}(0) = 0\,;$

je dis que nous aurons le théorème général:

I. Soit $n \geqq 1$, le polynome $\Psi_{2n}(x)$ est toujours divisible par la factorielle

$$(x+1)\, x\, (x-1)\, (x-2) \ldots (x-n+1),$$

[1] Quarterly Journal of Mathematics, t. 31, p. 321—353; 1900.

[2] Mathematische Annalen, t. 60, p. 488; 1905.

[3] Annales de l'École Normale, 3e série, t. 31, p. 198—200; 1914.

de sorte que nous aurons

$$(2)\quad \Psi_{2n}(x) = (x+1)\,x\,(x-1)\ldots(x-n+1)\,\psi_{n-1}(x),$$

où $\psi_{n-1}(x)$ est un polynome entier du degré $n-1$.

En effet, supposons $n \geqq 2$, la formule (1) donnera

$$\Psi_{2n}(1) = \Psi_{2n}(0) + \Psi_{2n-2}(0) = 0;$$

c'est-à-dire que $\Psi_{2n}(x)$ est, pour $n \geqq 2$, divisible par $x-1$; supposons ensuite $n \geqq 3$, puis introduisons, dans (1), $x = 1$, nous aurons $\Psi_{2n}(2) = 0$, de sorte que $\Psi_{2n}(x)$ est, pour $n \geqq 3$, divisible par $x-2$. Continuons de cette manière, la conclusion de $n$ à $n+1$ est évidente.

Dans ce qui suit nous désignons comme polynomes de Stirling la suite infinie de polynomes

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots,$$

définis par les formules (2).

Soit particulièrement, dans (2), $n = 1$, on trouvera

$$(3)\qquad \psi_0(x) = \frac{1}{2}.$$

Introduisons ensuite, dans (1), les expressions tirées de (2), puis posons $n+1$ au lieu de $n$, il résulte les équations fonctionnelles

$$(4)\quad (x+2)\,\psi_n(x+1) = (x-n)\,\psi_n(x) + (x+1)\,\psi_{n-1}(x),$$

et il est très facile de démontrer le théorème fondamental:

II. Les équations fonctionnelles (4), suppléées par la valeur initiale $\psi_0(x) = \frac{1}{2}$, déterminent parfaitement la suite des polynomes de Stirling.

En effet, posons

$$(5)\quad \psi_n(x) = \alpha_{n,0}x^n + \alpha_{n,1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n,r}x^{n-r} + \ldots + \alpha_{n,n},$$

l'équation fonctionnelle (4) donnera immédiatement

$$(6)\qquad (2n+2)\,\alpha_{n,0} = \alpha_{n-1,0},$$

et, pourvu que $p \geqq 1$,

$$(6\text{ bis})\begin{cases} (2n-p+2)\,\alpha_{n,p} = \\ = \alpha_{n-1,p}+\alpha_{n-1,p-1}-\sum_{s=0}^{s=p-1}\left[\binom{n-s}{p-s+1}+2\binom{n-s}{p-s}\right]\alpha_{n,s}, \end{cases}$$

formules qui nous permettent de déterminer successivement les coefficients $\alpha_{n,p}$, pourvu que les $\alpha_{n-1,p}$ soient connus. Soit $p=n$, il faut, dans (6 bis), supprimer le terme illusoire $\alpha_{n-1,n}$; de plus, le premier coefficient binomial qui figure sous le signe sommatoire s'évanouira.

Remarquons que le théorème IV de l'article précédent donnera immédiatement cet autre:

III. *Soit* $n \geqq 1$, *les polynomes de Stirling à l'indice pair, savoir les* $\psi_{2n}(x)$, *sont divisibles par* $x(x+1)$.

On voit que la détermination des coefficients du polynome $\psi_n(x)$ est très compliquée, aussi compliquée que la détermination des coefficients des polynomes $\Psi_{2n}(x)$. De plus, supposons connue la suite des polynomes de Stirling, nous avons à déterminer, en vertu de la formule (2), les $\Psi_{2n}(x)$, ce qui exige le développement d'une factorielle du rang $n$, savoir le problème que nous nous sommes proposé de résoudre. Néanmoins, les polynomes de Stirling jouent un rôle essentiel dans la théorie de la fonction exponentielle et du logarithme, nous le verrons bientôt.

Quant à ces applications transcendantes des polynomes de Stirling, nous avons besoin de plusieurs formules numériques qui sont des conséquences immédiates des définitions.

En premier lieu, il résulte, en vertu de (2) et des formules (7) de l'article précédent,

$$(7) \qquad C_{n+1}^{p} = \frac{(n+1)!}{(n-p)!}\,\psi_{p-1}(n), \qquad n \geqq p > 0$$

$$(7\text{ bis}) \qquad \mathfrak{C}_{n+1}^{p} = \frac{(-1)^{p-1}(n+p)!}{(n-1)!}\,\psi_{p-1}(-n-1), \qquad p > 0.$$

Quant aux coefficients $\alpha_{n,r}$, la formule (6) donnera immédiatement

$$(8) \qquad \alpha_{n,0} = \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}},$$

formule qui est aussi une conséquence de l'expression de $a_{n+1,0}$, indiquée dans la formule (11) de l'article précédent.

De plus, le théorème III donnera

$$(9) \qquad \psi_{2n}(0) = \alpha_{2n,2n} = 0,$$

tandis que les formules (12 bis) et (13) de l'article précédent donnent

$$(10) \qquad \psi_{2n-1}(0) = \alpha_{2n-1,2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}$$

$$(10\text{ bis}) \qquad \psi'_{2n}(0) = \alpha_{2n,2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)B_n}{(2n)!\,4n}.$$

Dans l'article XI, nous avons à déterminer d'autres valeurs numériques qui se rattachent aux polynomes de Stirling, ce qui nous conduira, dans l'article XIV, à une formule récursive très curieuse pour les nombres de Bernoulli.

## DEUXIÈME PARTIE

### De la fonction exponentielle.

---

### VI.—Nouvelles définitions des $\psi_n(x)$.

Les polynomes de Stirling que nous venons d'introduire par une méthode élémentaire, savoir à l'aide des nombres de Stirling, proviennent aussi comme coefficients de certaines séries de puissances élémentaires, propriétés des $\psi_n(x)$ qui sont essentielles dans nos recherches suivantes.

En premier lieu, je dis que nous aurons, quelle que soit le variable complexe $x$,

$$(1) \quad \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1+(x+1)\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}\psi_{n-1}(x)\,\alpha^n, \quad |\alpha| < 2\pi.$$

Remarquons tout d'abord qu'il existe une série de puissances de la forme indiquée et ayant son rayon de convergence égal à $2\pi$; de plus, les coefficients de cette série deviennent des polynomes entiers de $x$, d'un degré égal à l'indice. Supposons ensuite

$$|x| \leqq K,$$

où $K$ désigne un nombre positif, aussi grand qu'on le veut, je dis qu'il existe un autre nombre positif $k$, tel que la série qui figure au second membre de (1) est uniformément convergente par rapport à $x$, pourvu que

$$|\alpha| \leqq k.$$

A cet effet, posons pour abréger

$$(2) \qquad f(\alpha) = \frac{\alpha}{2!} + \frac{\alpha^2}{3!} + \frac{\alpha^3}{4!} + \ldots,$$

nous aurons évidemment

$$\frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = f(\alpha) + 1,$$

de sorte que la formule (1) donnera

$$(3) \qquad \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \psi_{n-1}(x)\, \alpha^n,$$

de plus, nous aurons, en appliquant la formule binomiale

$$(4) \qquad \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \binom{x+n}{n} \big(f(\alpha)\big)^n.$$

Posons ensuite, conformément à la définition (2),

$$(5) \qquad \big(f(\alpha)\big)^n = \alpha^n \left(q_{n,0} + q_{n,1}\,\alpha + \ldots + q_{n,p}\,\alpha^p + \ldots\right),$$

la série de puissances ainsi obtenue est toujours convergente, et les coefficients $q_{n,p}$ sont des nombres positifs et rationnels.

Soit maintenant $K$ un nombre positif, aussi grand qu'on le veut, il existe un nombre positif $k$, tel que les deux séries

$$\big(1 - f(\alpha)\big)^{-K-1} = 1 + (K+1) \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} G_{n-1}(K)\, \alpha^n$$

$$\big(1 - f(\alpha)\big)^{-K-1} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \binom{K+n}{n} \big(f(\alpha)\big)^n$$

sont uniformément convergentes, pourvu que $|\alpha| \leqq k$, de sorte que nous aurons, en vertu de (5), et en appliquant un théorème bien connu de Weierstrass,

$$(K+1)\, G_n(K+1) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{K+n-s+1}{n-s+1} q_{n-s+1,\, s}.$$

Cela posé, soit $|x| \leqq K$, nous aurons évidemment

$$\left|\binom{x+n}{n}\right| \leqq \binom{K+n}{n}, \quad n \geqq 0,$$

c'est-à-dire que la série qui figure au second membre de (4) est absolument convergente, pourvu que $|\alpha| \leqq k$, de sorte que nous aurons, en vertu de (3),

$$(6) \quad (x+1)\,\psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{x+n-s+1}{n-s+1} q_{n-s+1,\,s}.$$

Remarquons maintenant que les coefficients $q_{2n,\,r}$ sont des nombres positifs, nous aurons par conséquent

$$|(x+1)\,\psi_n(x)| \leqq (K+1)\,G_n(K);$$

c'est-à-dire que la série qui figure au second membre de (1) est absolument et uniformément convergente par rapport à $x$, pourvu que nous ayons à la fois

$$|x| \leqq K, \quad |\alpha| \leqq k.$$

Cela posé, multiplions par $\alpha^{-x-1}$ les deux membres de la formule (1), puis différentions par rapport à $x$, terme à terme, ce qui est permis, nous retrouvons, pour les coefficients $\psi_n(x)$, l'équation fonctionnelle (4) de l'article précédent; de plus, nous aurons évidemment

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}.$$

La seconde série de puissances en question, savoir

$$(7) \quad \left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right)^x = 1 + x \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(x+n)\,\alpha^{n+1}, \quad |\alpha| < 1,$$

peut être démontrée par la même méthode que la précédente.

Différentions par rapport à $x$ les deux membres de la formule (7), puis posons $x = 0$, il résulte

$$(8) \quad -\log\left(\frac{-\alpha}{\log(1-\alpha)}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(n)\,\alpha^{n+1}, \quad |\alpha| < 1;$$

il est très facile d'exprimer, à l'aide des nombres connus, le coefficient général de cette dernière série de puissances.[1]

Ubbo Meyer[2] a étudié, le premier que je sache, les deux séries de puissances qui figurent aux seconds membres des formules (1) et (7), et, sans introduire les fonctions $\psi(x)$, il a vu la dépendance entre les deux suites de coefficients. Plus tard, Cayley[3] a étudié la série de puissances (8) et celles obtenues de (7), en différentiant $r$ fois par rapport à $x$, puis posant $x = 0$, cependant il n'a pas trouvé la loi générale pour la formation des coefficients des séries de puissances ainsi obtenues.

Les dérivées, regardées par Cayley, et plusieurs autres du même genre sont contenues, comme des cas particuliers, dans les deux suivantes

$$(9) \qquad n!\,(x+1)\,\psi_{n-1}(x) = D_\alpha^n\left[\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1}\right]_{\alpha=0}$$

$$(10) \quad n!\,x\,\psi_{n-1}(x+n-1) = D_\alpha^n\left[\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right)^{x}\right]_{\alpha=0},$$

tirées directement des formules (1) et (7).

Posons, dans (9) et (10), $x = p$ respectivement $x = -p$, où $p$ désigne un positif entier, il résulte, en vertu des formules (7) et (7 bis) de l'article IV,

$$(11) \quad C_{p+1}^n = \binom{p}{n} D_\alpha^n\left[\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-p-1}\right]_{\alpha=0}, \quad p \geqq n,$$

$$(12) \quad \mathfrak{C}_{p-n+1}^n = (-1)^n\binom{p-1}{n} D_\alpha^n\left[\left(\frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha}\right)^{-p}\right]_{\alpha=0}, \; p \geqq n+1;$$

[1] Voir mon Handbuch der Theorie der Gammafunktion, p. 77; Leipsic 1906.

[2] Archiv de Grunert, t. 9, p. 101—112; 1847.

[3] Quarterly Journal, t. 3, p. 366—369; 1860.

la première de ces formules est due à SCHLÖMILCH.[1] Ces deux dérivées connues, il résulte, en vertu de (1) et (7), les séries de puissances

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{p!}{(1-e^{-x})^{p+1}} \doteq \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s (p-s)!\, C_{p+1}^s}{x^{p-s+1}} + (p+1)! \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_{p+s}(p)\, x^s \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{p!}{\big(\log(1+x)\big)^{p+1}} = \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s (p-s)!\, \mathfrak{C}_{p-s+2}^s}{x^{p-s+1}} + (p+1)! \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^{p+s} \psi_{p+s}(s-1)\, x^s \end{cases}$$

dont les rayons de convergence sont égaux à $2\pi$ respectivement à 1; la première partie de la série de puissances qui figure au second membre de (13) est également due à SCHLÖMILCH[2] et plus tard étudiée par SYLVESTER.[3]

Les deux formules (1) et (7) donnent de même

$$(15)\qquad \mathfrak{C}_{p+1}^n = (-1)^n \binom{p+n}{n} D_\alpha^n \left[ \left( \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} \right)^p \right]_{\alpha=0}$$

$$(16)\qquad C_{p+n}^n = \binom{p+n}{n} D_\alpha^n \left[ \left( \frac{\log(1-\alpha)}{-\alpha} \right)^p \right]_{\alpha=0},$$

où $p$ désigne un positif entier, de sorte que nous aurons les deux séries de puissances très connues

$$(17)\qquad \frac{\big(\log(1+x)\big)^p}{p!} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s C_{p+s}^s\, x^{p+s}}{(p+s)!}$$

$$(18)\qquad \frac{(e^x-1)^p}{p!} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\mathfrak{C}_{p+1}^s\, x^{p+s}}{(p+s)!},$$

[1] Archiv de Grunert, t. 9, p. 333; 1847.

[2] Journal de Crelle, t. 44, p. 350; 1852.

[3] Voir le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 15, p. 195; 1883.

dont la première a le rayon de convergence 1, tandis que la seconde est toujours convergente.

Pour mettre en pleine lumière le rôle fondamental que jouent les nombres de STIRLING, pour la fonction exponentielle et pour le logarithme, nous citons les deux formules différentielles très connues

$$D_x^n f(\log x) = \frac{1}{x^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^s f^{(n-s)}(t)_{t=\log x} \tag{19}$$

$$D_x^n f(e^x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{(n-s)x} \mathfrak{C}_{n-s+1}^s f^{(n-s)}(t)_{t=e^x}. \tag{20}$$

Nous avons encore, dans cet article, à développer une suite des formules qui sont une conséquence directe de la série de puissance (1) et qui jouent un rôle fondamental dans nos recherches suivantes.

En premier lieu, prenons pour point de départ l'identité évidente

$$e^{\alpha(x+y+1)} \left(\frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\right)^{-x-1} = e^{\alpha y} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1},$$

puis cherchons le coefficient de la puissance $\alpha^{n+1}$, il résulte l'identité algébrique

$$(21) \left\{ \begin{aligned} &\frac{(x+y+1)^{n+1}}{(n+1)!} - (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (x+y+1)^{n-s}}{(n-s)!} \psi_s(x) = \\ &\qquad = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} + (x+1) \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{y^{n-s} \psi_s(x)}{(n-s)!}, \end{aligned} \right.$$

où $x$ et $y$ sont des variables complexes quelconques.

En second lieu, l'identité

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-y-1} = \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-y-2}$$

donnera de même

$$(22)\quad \begin{cases} (x+y+2)\,\psi_n(x+y+1) = (x+1)\,\psi_n(x)+(y+1)\,\psi_n(y)+ \\ \qquad\qquad + (x+1)\,(y+1)\cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \psi_s(x)\,\psi_{n-s-1}(y). \end{cases}$$

On voit du reste que cette dernière identité n'est pas caractéristique pour les polynomes de STIRLING, parce qu'elle est valable pour les polynomes $\varphi_n(x)$ définis par le développement

$$\big(1-\alpha f(\alpha)\big)^{-x-1} = 1+(x+1)\cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_{n-1}(x)\,\alpha^n,$$

où $f(\alpha)$ est une fonction holomorphe aux environs du point $\alpha = 0$.

En dernier lieu, nous avons à appliquer les polynomes de BERNOULLI définis par les deux équations fonctionnelles

$$B'_n(x) = B_{n-1}(x), \qquad B_n(x)-B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geqq 1,$$

et intimement liés aux polynomes $\Phi_n(x)$, appliqués dans l'article IV, parce que nous aurons

$$\Phi_n(x) = (n-1)!\,\big(B_n(x)-B_n(0)\big).$$

A cet effet, prenons pour point de départ la série de puissances

$$\frac{e^{\alpha x}\,\alpha}{1-e^{-\alpha}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(x)\,\alpha^n, \qquad |\alpha| < 2\pi,$$

qui conduira immédiatement aux deux équations fonctionnelles susdites, puis appliquons l'identité

$$\frac{e^{\alpha x}\,\alpha}{1-e^{-\alpha}}\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)^{-x-y-1} = \left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1}\left(\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}\right)^{-y-1},$$

nous aurons, en cherchant le coefficient de la puissance $\alpha^{n+1}$,

$$(23)\left\{\begin{aligned} & B_{n+1}(x)-(x+y+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\psi_s(x+y)B_{n-s}(x) = \\ & \quad = (x+1)\psi_n(x)-(-1)^n(y+1)\psi_n(y)- \\ & \quad\quad -(x+1)(y+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\psi_s(y)\psi_{n-s-1}(x). \end{aligned}\right.$$

Quant aux polynomes de Bernoulli, nous avons encore à appliquer cette autre identité évidente

$$\frac{e^{-\frac{(x+1)\alpha}{2}}\alpha}{1-e^{-\alpha}}\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x} = \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\frac{\alpha}{2}}}{\alpha}\right)^{-x-1};$$

remarquons ensuite que la fonction qui figure au second membre est une fonction paire de $\alpha$, nous aurons

$$B_{2n+1}\left(-\frac{x+1}{2}\right)+x\cdot\sum_{s=0}^{s=2n}\psi_s(x-1)B_{2n-s}\left(-\frac{x+1}{2}\right) = 0,$$

d'où, en posant $x+1$ au lieu de $x$,

$$(24)\quad B_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right) = (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=2n}(-1)^s\psi_s(x)B_{2n-s}\left(\frac{x}{2}\right),$$

car nous aurons, quel que soit l'indice $n$,

$$B_n(-x-1) = (-1)^n B_n(x).$$

## VII.—Sur une série d'Euler.

Pour donner des éclaircissements sur une série de puissances, regardée par Euler[1], Scherck[2] et Worpitzky[3], nous avons à étudier la fonction

[1] Institutiones calculi differentialis, p. 485—486, Pétrograde 1755.
[2] Journal de Crelle, t. 4, p. 302; 1829.
[3] Journal de Crelle, t. 94, p. 225; 1883.

$$(1) \qquad y = \frac{1}{b + a e^x},$$

où $a$ et $b$ sont des constantes quelconques. Un calcul direct donnera

$$\begin{aligned} ab\,y^2 &= y' + ay \\ 2(ab)^2 y^3 &= y'' + 3a y' + 2a^2 y \\ 6(ab)^3 y^4 &= y''' + 6ay'' + 11a^2 y' + 6a^3 y, \end{aligned}$$

ce qui nous conduira à poser généralement

$$(2) \qquad n!\,(ab)^n y^{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^s a^s y^{(n-s)}.$$

Quant à la conclusion de $n$ à $n+1$, supposons vraie la formule (2), puis différentions par rapport à $x$, il résulte

$$(n+1)!\,(ab)^n y^n (ab\,y^2 - y) = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^s a^s y^{(n-s+1)},$$

et la formule récursive

$$C_{n+2}^s = C_{n+1}^s + (n+1)\, C_{n+1}^{s-1}$$

conduira immédiatement au but.

Inversement, nous aurons

$$\begin{aligned} y' &= ab\,y^2 - a y \\ y'' &= 2(ab)^2 y^3 - 3a(ab)y^2 + a^2 y \\ y''' &= 6(ab)^3 y^4 - 12a(ab)^2 y^3 + 7a^2(ab)y^2 - a^3 y, \end{aligned}$$

ce qui conduira à la formule générale

$$(3) \qquad y^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (n-s)!\, \mathfrak{C}_{n-s+2}^s a^s (ab)^{n-s} y^{n-s+1}.$$

En effet, supposons vraie la formule (3), puis différentions par rapport à $x$, il résulte

$$y^{(n+1)} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (n-s+1)!\, \mathfrak{C}_{n-s+2}^s a^s (ab)^{n-s} y^{n-s} (ab\,y^2 - ay);$$

ordonnons ensuite, d'après des puissances descendantes de $y$, le second membre de cette dernière formule, la relation

$$\mathfrak{S}_{n-s+3}^{s} = \mathfrak{S}_{n-s+2}^{s} + (n-s+2)\,\mathfrak{S}_{n-s+3}^{s-1}$$

conduira immédiatement au but.

Étudions plus amplement le cas particulier $a = 1$, $b = -\alpha$, où $\alpha$ est un nombre complexe différent de l'unité, mais arbitraire du reste, il existe un développement de la forme

$$\frac{1}{\alpha - e^x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi_n(\alpha)\, x^n}{n!\,(\alpha-1)^{n+1}}\,, \quad \alpha \neq 1, \tag{4}$$

et nous aurons, en vertu de (3),

$$\varphi_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s (n-s)!\, \mathfrak{S}_{n-s+2}^{s}\, \alpha^{n-s} (\alpha-1)^s, \tag{5}$$

tandis que la formule (2) donnera

$$n!\,\alpha^n = \sum_{s=0}^{s=n} C_{n+1}^{s} (\alpha-1)^s \varphi_{n-s}(\alpha). \tag{6}$$

Quant au polynome $\varphi_n(\alpha)$, défini par la formule (5), posons

$$\varphi_n(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_r\alpha^r + \ldots,$$

nous aurons généralement, en vertu de (5),

$$c_r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s (r-s)! \binom{n-r+s}{s} \mathfrak{S}_{r-s+2}^{n-r+s}\,; \tag{7}$$

ordonnons ensuite, d'après les puissances $(r-s+1)^{n+1}$, l'expression indiquée pour $c_r$, le coefficient de cette puissance se présente sous la forme

$$(-1)^s \cdot \sum_{\mu=0}^{\mu=s} \frac{(r-\mu)!}{(r-\mu+1)!} \binom{n-r+\mu}{\mu} \binom{r-\mu+1}{s-\mu},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\frac{(-1)^s}{r-s+1}\sum_{\mu=0}^{\mu=s}\binom{n-r+\mu}{\mu}\binom{r-\mu}{s-\mu} = \frac{(-1)^s}{r-s+1}\binom{n+1}{s},$$

ce qui donnera finalement

$$(8) \qquad c_r = \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\binom{n+1}{s}(r-s+1)^n,$$

de sorte que nous aurons

$$(9) \qquad c_n = \sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s(n-s)!\,\mathfrak{C}_{n-s+2}^{s} = 0.$$

Cela posé, il est évident que $\varphi_n(\alpha)$ est un polynome du degré $n-1$ par rapport à $\alpha$, savoir

$$(10) \qquad \varphi_n(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1};$$

on voit que l'expression générale des coefficients $c_r$ n'est pas formellement la même que celle indiquée par Euler.[1]

Dans l'article IX nous avons à étudier, par une autre méthode, les polynomes $\varphi_n(\alpha)$.

## VIII.—Deux séries de Lagrange.

Pour mettre en pleine lumière le rôle fondamental que les nombres de Stirling jouent dans la théorie de la fonction exponentielle et du logarithme, nous avons tout d'abord à étudier la série de Lagrange

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(e^x-1)^n.$$

A cet effet, supposons que la série de puissances

$$(2) \qquad f(x) = \Sigma A_n x^n,$$

dont les coefficients sont les mêmes que ceux de la série

[1] Institutiones calculi differentialis, p. 485—486; Pétrograde 1755.

de LAGRANGE en question, ait le rayon de convergence $r > 0$; il est évident que le domaine de convergence de la série (1) est la partie du plan des $x$ déterminée par la condition

$$|e^x - 1| < r, \tag{3}$$

d'où, en posant $x = \alpha + i\beta$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des variables réelles,

$$e^{2\alpha} - 2e^{\alpha}\cos\beta + 1 - r^2 < 0. \tag{4}$$

Cela posé, il est évident que le domaine de convergence ainsi déterminé est composé par une infinité de domaines convergents. En effet, soit $K_0(r)$ la partie du plan des $x$, définie par l'inegalité (4), suppléée par la condition ultérieure

$$-\pi \leqq \beta \leqq +\pi, \tag{5}$$

il est évident que l'on obtiendra un autre des domaines en question $K_p(r)$ en posant, dans $K_0(r)$, $\beta + 2p\pi$ à la place de $\beta$, où $p$ désigne un nombre entier quelconque.

Dans ce qui suit nous désignons par $k_0(r)$ la frontière du domaine $K_0(r)$, savoir la courbe définie par l'équation en coordonnées rectangulaires

$$e^{2\alpha} - 2e^{\alpha}\cos\beta + 1 - r^2 = 0, \tag{6}$$

suppléée par la condition ultérieure (5); c'est-à-dire que la frontière $k_p(r)$ du domaine $K_p(r)$ peut être déduite de $k_0(r)$ en y remplaçant $\beta$ par $\beta + 2p\pi$. De plus, nous désignons par $L_p(r)$ l'ensemble du domaine $K_p(r)$ et de sa frontière $k_p(r)$.

Quant à la courbe $k_0(r)$, que nous avons à étudier plus amplement, il résulte, en vertu de (6),

$$2(e^{2\alpha} - e^{\alpha}\cos\beta)\frac{d\alpha}{d\beta} + 2e^{\alpha}\sin\beta = 0;$$

c'est-à-dire que les valeurs maximums et minimums de $\alpha$ correspondent à $\beta = 0$, $\beta = \pm \pi$ respectivement.

Cela posé, nous avons à étudier séparément les trois cas suivants:

$1^0$ $r < 1$. Dans ce cas la courbe $k_0(r)$ est fermée et ses points d'intersection avec l'axe réelle et l'axe imaginaire sont déterminés par les valeurs

$$\alpha = \log(1 \pm r), \quad \beta = \pm \arccos \frac{2-r}{2},$$

de sorte que nous aurons constamment

$$\log(1-r) \leqq \alpha \leqq \log(1+r).$$

Dans ce cas la série (1) représente généralement des fonctions différentes dans les domaines différents $K_n(r)$, à moins que la fonction $F(x)$ qu'il s'agit de développer n'ait la période additive $2\pi i$, savoir

$$F(x+2\pi i) = F(x). \tag{7}$$

$2^0$ $r = 1$. La courbe $k_0(r)$ est une branche ouverte ayant les asymptotes $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, et dont les points d'intersection avec les axes sont déterminés par les valeurs

$$\alpha = \log 2, \quad \beta = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Du reste, la série (1) a, dans ce cas, les mêmes propriétés que dans le cas précédent.

$3^0$ $r > 1$. Le domaine de convergence de la série de Lagrange en question est formé par une seule partie infiniment grande du plan des $x$, de sorte que la somme $F(x)$ de la série (1) est, dans ce cas, une fonction périodique de $x$, satisfaisant à la condition (7).

On voit que les valeurs maximums et minimums de $\alpha$, qui correspondent à $\beta = 2p\pi$, respectivement $\beta = (2p+1)\pi$, deviennent

$$\alpha = \log(r+1), \quad \alpha = \log(r-1).$$

Soit maintenant

$$(8) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une fonction analytique aux environs de l'Origine, il existe toujours un développement de la forme

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s (e^x - 1)^s,$$

convergent dans un domaine $K_0(r)$, et dont les coefficients $A_n$ sont à déterminer, d'après la formule de Lagrange[1], faussement attribuée à Bürmann[2], par les expressions

$$(10) \qquad \begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \dfrac{1}{n!} D_x^{n-1} \left[ \left( \dfrac{x}{e^x - 1} \right)^n f'(x) \right]_{x=0}, \end{cases}$$

d'où, en vertu de la formule de Leibniz,

$$A_n = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{n-1}{s} (n-s)!\, a_{n-s} D_x^s \left( \frac{x}{e^x - 1} \right)^n_{x=0},$$

ce qui donnera finalement, en vertu de la formule (11) de l'article VI,

$$(11) \qquad \begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (n-s)!}{n!} C_n^s a_{n-s}. \end{cases}$$

Inversement, prenons pour point de départ la série de Lagrange, qui figure au second membre de (9), cette série est uniformément convergente dans le domaine $L_0(r-\delta)$,

[1] Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1768, p. 275.

[2] C. Ramus: Algebra og Functionslære, p. 108—112; Copenhague 1840, Schlömilch: Compendium der höheren Analysis, t. II, p. 102, 3e édition· Brunswick 1879.

où $\delta$ est une quantité positive arbitrairement petite, ce qui donnera, en vertu de la formule (18) de l'article VI,

$$(12) \qquad \begin{cases} a_0 = A_0 \\ a_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(n-s)!}{n!} \mathfrak{C}_{n-s+1}^{s} A_{n-s}. \end{cases}$$

En second lieu, nous avons à regarder cette autre série de Lagrange

$$(13) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\log(1+x)\right)^n,$$

dont le domaine de convergence est déterminé par la condition

$$(14) \qquad \left|\log(1+x)\right| < r,$$

où $r$ désigne le rayon de convergence de la série de puissances (2); on voit que le domaine en question contient toujours le point $x=0$.

Supposons, dans ce cas, la série de puissances (8) développée comme suit

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \left(\log(1+x)\right)^s,$$

nous aurons, en vertu de la formule de Lagrange

$$A_n = \frac{1}{n!} D_x^{n-1} \left[\left(\frac{x}{\log(1+x)}\right)^n f'(x)\right]_{x=0},$$

d'où, en appliquant la formule de Leibniz, puis introduisant les dérivées indiquées dans la formule (12) de l'article VI,

$$(16) \qquad \begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(n-s)!}{n!} \mathfrak{C}_{n-s+1}^{s} a_{n-s}, \end{cases}$$

tandis que les formules inverses deviennent, en vertu de la formule (17) de l'article VI,

$$(17)\qquad \begin{cases} a_0 = A_0 \\ a_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (n-s)!}{n!} C_n^s A_{n-s}. \end{cases}$$

## IX.—Applications diverses.

Soit par exemple

$$(1)\quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n x^{2n}}{(2n)!}, \ |x| < 2\pi,$$

où les $B_n$ sont les nombres de Bernoulli, l'identité évidente

$$f(x) = \frac{\log\bigl(1 + (e^x - 1)\bigr)}{e^x - 1}$$

donnera, en vertu de la série de Mercator,

$$(2)\qquad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (e^x - 1)^n,$$

développement qui n'est applicable que dans le domaine $K_0(1)$, tandis que la série de Lagrange en question représente d'autres fonctions dans les autres domaines $K_p(1)$.

Dans ce cas les formules générales (11) de l'article précédent donnent, après une simple réduction, la formule

$$(3)\qquad \frac{(n-1)!\,(n-1)}{2n+2} = \sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^{s-1} C_n^{n-2s} B_s,$$

due à Slömilch [1] et retrouvée par A. Radicke [2]; dans

[1] Archiv de Grunert, t. 9, p. 334; 1847.

[2] Die Recursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen, p. 15; Halle a. S. 1880.

l'article XIV nous avons à déduire, par une autre méthode, une généralisation très étendue de la formule (3).

Quant aux formules générales (12) de l'article précédent, nous aurons ici une expression explicite des nombres de Bernoulli, savoir

$$(4) \qquad (-1)^{n-1} B_n = \sum_{s=0}^{s=2n-1} \frac{(-1)^s (2n-s)!}{2n-s+1} \mathfrak{C}_{2n-s+1}^{s}$$

et la formule récursive

$$(5) \qquad 0 = \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{(-1)^s (2n-s+1)!}{2n-s+2} \mathfrak{C}_{2n-s+2}^{s}.$$

Étudions, comme second exemple, la fonction

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{\alpha - e^x} = \frac{1}{\alpha - 1 - (e^x - 1)}, \quad \alpha \neq 1,$$

il résulte la série de Lagrange

$$(7) \qquad \frac{1}{\alpha - e^x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(e^x - 1)^n}{(\alpha - 1)^{n+1}},$$

applicable dans l'ensemble de tous les domaines $K_p(r)$, où nous avons posé pour abréger $r = |\alpha - 1|$, car la fonction $f(x)$, dont il s'agit ici, admet la période additive $2\pi i$.

Posons, conformément à la formule (4) de l'article VII,

$$(8) \qquad \frac{1}{\alpha - e^x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi_n(\alpha)\, x^n}{n!\,(\alpha - 1)^{n+1}},$$

il résulte par conséquent, en vertu des formules générales (12) de l'article précédent, pour $\varphi_n(\alpha)$ l'expression

$$(9) \qquad \varphi_n(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (n-s)!\, \mathfrak{C}_{n-s+1}^{s} (\alpha - 1)^s,$$

formellement différente de celle indiquée par la formule (5) de l'article VII, tandis que la formule inverse deviendra

$$(10)\qquad n! = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s C_n^s \varphi_{n-s}(\alpha)(\alpha-1)^s,$$

formule qui est très curieuse, comparée à la formule (6) de l'article VII.

Revenons maintenant à la formule (9), puis posons, conformément à l'expression (10) de l'article VII,

$$(11)\qquad \varphi_n(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \ldots + c_{n-1}\alpha^{n-1},$$

nous aurons immédiatement

$$c_r = \sum_{s=0}^{s=n-r-1} (-1)^s (n-r-s)!\, \mathfrak{C}_{n-r-s+1}^{r+s} \binom{r+s}{s},$$

et le coefficient de la puissance $(n-r-\mu)^n$ qui figure dans cette expression deviendra

$$(-1)^\mu \sum_{s=0}^{s=n} \binom{r+s}{s}\binom{n-r-s}{\mu-s} = (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu},$$

de sorte que nous aurons finalement

$$(12)\qquad c_r = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-r-1} (-1)^\mu \binom{n+1}{\mu} (n-r-\mu)^n,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule (8) de l'article VII,

$$c_r = c_{n-r-1};$$

c'est-à-dire que nous avons démontré la proposition, due à Scherk [1]:

La fonction $\varphi_n(x)$ est un polynome réciproque du degré $n-1$, savoir

$$(13)\qquad x^{n-1}\varphi_n\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_n(x).$$

Euler [2] a calculé les huit premiers des polynomes $\varphi_n(x)$, savoir

[1] Journal de Crelle, t. 4, p. 302, 1829.

[2] Institutiones calculi differentialis, p. 485—486, Pétrograde 1755.

$$\varphi_0(x) = 1$$
$$\varphi_1(x) = 1$$
$$\varphi_2(x) = x + 1$$
$$\varphi_3(x) = x^2 + 4x + 1$$
$$\varphi_4(x) = x^3 + 11x^2 + 11x + 1$$
$$\varphi_5(x) = x^4 + 26x^3 + 66x^2 + 26x + 1$$
$$\varphi_6(x) = x^5 + 57x^4 + 302x^3 + 302x^2 + 57x + 1$$
$$\varphi_7(x) = x^6 + 120x^5 + 1191x^4 + 2416x^3 + 1191x^2 + 120x + 1.$$

Désignons, comme ordinairement, par $T_n$ les coefficients des tangentes, l'hypothèse $\alpha = -1$ donnera, en vertu de (8),

$$\varphi_{2n-1}(-1) = (-1)^{n-1} T_n$$

$$\varphi_0(-1) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi_{2n}(-1) = 0,$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (9),

$$(14) \quad (-1)^{n-1} T_n = \sum_{s=0}^{s=2n-2} (-1)^s (2n-s-1)!\, 2^s \mathfrak{C}_{2n-s}^s$$

$$(15) \quad 0 = \sum_{s=0}^{s=2n-1} (-1)^s (2n-s)!\, 2^s \mathfrak{C}_{2n-s+1}^s,$$

tandis que la formule (10) donnera de même

$$(16) \quad n! = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} (-1)^s 2^{n-2s-1} T_{s+1} C_n^{n-2s-1}.$$

La formule (14) est due à LAPLACE.[1]

Nous avons encore à développer la transcendante entière

$$f(x) = e^{\alpha x},$$

où $\alpha$ est une constante quelconque; les formules générales (11) du paragraphe précédent donnent, dans ce cas,

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s \alpha^{n-s}}{n!} C_n^s = \binom{\alpha}{n},$$

[1] Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1777, p. 109—110 (1780).

de sorte que nous aurons la série de Lagrange, valable dans le domaine $K_0(1)$,

$$(17)\qquad e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{\alpha}{n} (e^x - 1)^n,$$

évidente du reste. Quant aux formules (12) de l'article précédent, nous aurons, en changeant le signe de $\alpha$,

$$(18)\qquad \alpha^n = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \mathfrak{C}_{n-s+1}^s \, \omega_{n-s}(\alpha),$$

savoir la formule de Stirling, mentionnée dans l'article III; on connaît plusieurs démonstrations modernes de la formule (18), par exemple celle de Cauchy.[1]

Cherchons encore, dans la formule (17), le coefficient de la puissance $\alpha^n$, il résulte le développement

$$(19)\qquad \frac{x^x}{n!} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s C_{n+s}^s}{(n+s)!} (e^x - 1)^{n+s},$$

savoir la formule (17) de l'article VI, ce dernier développement est aussi valable dans le domaine $K_0(1)$.

Les deux séries de Lagrange qui figurent aux seconds membres des formules (17) et (19) sont intéressantes, parce qu'elles donnent des développements d'une transcendante entière d'après les puissances d'une autre transcendante entière, et les séries en question représentent des fonctions différentes dans chacun de leurs domaines de convergence, propriété analogue à celle des séries de Fourier.

## X. — D'autres applications.

Nous avons encore à étudier deux autres applications des formules générales développées dans l'article VIII,

[1] Résumés analytiques, p. 34; Turin 1833.

applications qui mettent en pleine lumière la nature très singulière des polynomes de STIRLING.

Combinons tout d'abord les deux séries de puissances (1) et (7) de l'article VI, posons dans la première de ces séries

$$\alpha = -\log(1+t),$$

il résulte

$$\left(\frac{\log(1+t)}{t}\right)^{x+1} = 1 + (x+1)\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\psi_n(x)\left(\log(1+t)\right)^{n+1},$$

tandis que la dernière des séries susdites donnera

$$\left(\frac{\log(1+t)}{t}\right)^{x+1} = 1 + (x+1)\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^{n+1}\psi_n(x+n+1)\,t^{n+1}.$$

Cela posé, nous aurons, en vertu des formules générales (17) et (18) de l'article VI,

$$(1)\qquad \psi_n(x+n+1) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(n-s+1)!}{(n+1)!}\,C_{n+1}^{s}\,\psi_{n-s}(x),$$

$$(1\text{ bis})\quad \psi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(n-s+1)!}{(n+1)!}\,\mathfrak{C}_{n-s+2}^{s}\,\psi_{n-s}(x+n-s+1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(2)\quad \psi_n(x+n+1) = \psi_n(x) + \sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)\,\psi_{s-1}(n)\,\psi_{n-s}(x),$$

$$(2\text{ bis})\left\{\begin{array}{l} \psi_n(x) = \psi_n(x+n+1) - \\ -\displaystyle\sum_{s=1}^{s=n}(n-s+1)\,\psi_{s-1}(-n+s-2)\,\psi_{n-s}(x+n-s+1); \end{array}\right.$$

dans les deux dernières formules il faut supposer naturellement $n \geq 1$.

Étudions ensuite le développement

$$(3)\qquad (1-\alpha)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\varphi_n(x)}{n!}\,(e^{\alpha}-1)^n,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\text{(3 bis)} \qquad \left(1-\log(1+\alpha)\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!}\,\alpha^n\,;$$

c'est-à-dire que la série (3) est applicable dans le domaine $K_0(1)$.

Différentions par rapport à $\alpha$ les deux membres de la formule (3 bis), puis multiplions par $\alpha+1$, il résulte pour les $\varphi_n(x)$ l'équation fonctionnelle

$$\text{(4)} \qquad x\,\varphi_n(x+1) = \varphi_{n+1}(x) + n\,\varphi_n(x)\,,$$

tandis que les formules générales (11) et (12) de l'article VIII donnent

$$\text{(5)} \qquad \varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s\, C_n^s\, \omega_{n-s}(x)$$

$$\text{(5 bis)} \qquad \omega_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \mathfrak{C}_{n-s+1}^s\, \varphi_{n-s}(x)\,;$$

c'est-à-dire que $\varphi_n(x)$ est un polynome du degré $n$ par rapport à $x$, et divisible par $x$, pourvu que $n>0$.

Posons

$$\text{(6)} \quad \varphi_n(x) = a_{n,0}\,x^n + a_{n,1}\,x^{n-1} + \ldots + a_{n,r}\,x^{n-r} + \ldots + a_{n,n-1}\,x,$$

il résulte, en vertu de (5),

$$\text{(7)} \qquad a_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s\, C_n^s\, C_{n-s}^{r-s}\,,$$

ce qui donnera

$$\text{(7 bis)} \qquad a_{n,0} = 1\,, \quad a_{n,1} = 0.$$

Supposons maintenant, dans (7), $r \geqq 2$, puis introduisons au second membre les polynomes de Stirling, nous aurons

$$\text{(8)} \left\{ \begin{aligned} a_{n,r} = {} & n(n-1)\ldots(n-r)\Big(\big(1+(-1)^r\big)\,\psi_{r-1}(n-1) + \\ & + \sum_{s=1}^{s=r-1} (-1)^s (n-s)\,\psi_{s-1}(n-1)\,\psi_{r-s-1}(n-s-1)\Big), \end{aligned} \right.$$

ce qui nous conduira à étudier la fonction

$$(9)\quad \begin{cases} g_r(x) = \left(1-(-1)^r\right)\psi_r(x) - \\ \qquad -\sum\limits_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s(x-s)\,\psi_s(x)\,\psi_{r-s-1}(x-s-1), \\ g_0(x) = 0, \end{cases}$$

parce que nous aurons, pour $r \geqq 1$,

$$(10)\qquad a_{n,r} = n(n-1)\ldots(n-r)\,g_{r-1}(n-1).$$

Quant aux polynomes $g_r(x)$, remarquons que les formules (4) et (5 bis) donnent les formules récursives

$$(11)\quad a_{n+1,r}-a_{n,r}+(r-1)\,a_{n,r-1} = \sum_{s=0}^{s=r-2}\binom{n-s}{r-s}a_{n,s},\quad r \geqq 2$$

$$(11\text{ bis})\qquad C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r}\mathfrak{C}_{n-s+1}^{s}\,a_{n-s,\,r-s},$$

de sorte que nous aurons, en introduisant les polynomes $\psi_m(x)$ et $g_m(x)$,

$$(12)\quad \begin{cases} (x+2)\,g_r(x+1)-(x-r)\,g_r(x)+r\,g_{r-1}(x) = \\ \qquad = \dfrac{1}{(r+1)!}+\sum\limits_{s=0}^{s=r-2}\dfrac{(x-s)\,g_s(x)}{(r-s)!} \end{cases}$$

$$(12\text{ bis})\quad \begin{cases} \psi_r(x) = g_r(x)+ \\ +\sum\limits_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s(x-s)\,g_{r-s-1}(x-s)\,\psi_s(-x+s-1)+ \\ \qquad +(-1)^r\psi_r(-x+r-1); \end{cases}$$

dans ces deux formules il faut supposer $r \geqq 2$ respectivement $r \geqq 1$.

On trouve par exemple

$$g_0(x) = 0,\quad g_1(x) = \frac{1}{3!},\quad g_2(x) = -\frac{1}{4!},\quad g_3(x) = \frac{5x+4}{5!\,3},$$

ce qui donnera

$$a_{n,0} = 1,\quad a_{n,1} = 0,\quad a_{n,2} = \binom{n}{3},\quad a_{n,3} = -\binom{n}{4},$$

$$a_{n,4} = \binom{n}{5}\frac{5n-1}{3},$$

de sorte que nous aurons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1\\
\varphi_1(x) &= x\\
\varphi_2(x) &= x^2\\
\varphi_3(x) &= x^3+x\\
\varphi_4(x) &= x^4+4x^2-x\\
\varphi_5(x) &= x^5+10x^3-5x^2+8x\\
\varphi_6(x) &= x^6+20x^4-15x^3+58x^2-26x.
\end{aligned}$$

Soit, dans (5), $x = -1$, on aura généralement

$$(13) \qquad \varphi_n(-1) = (-1)^n (n-1)!,$$

formule qui peut servir comme contrôle des calculs précédents.

Quant au polynome $g_n(x)$, on voit que son degré est toujours inférieur à son indice. Or, une étude plus profonde de cette question nous conduira beaucoup trop loin ici.

En dernier lieu, posons

$$(14) \qquad \left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \varphi_n(x)\,\alpha^n}{n!\,2^n}, \qquad |\alpha| < \frac{\pi}{2},$$

l'identité évidente

$$\left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right)^{-x} = \left(1-\frac{1-e^\alpha}{2}\right)^{-x}$$

donnera la série de Lagrange

$$(14 \text{ bis}) \qquad \left(\frac{1+e^\alpha}{2}\right)^{-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\binom{x+n-1}{n}(e^\alpha-1)^n,$$

valable dans l'ensemble des domaines $K_p(2)$, parce que la fonction, dont il s'agit ici, admet la période additive $2\pi i$.

Cela posé, il résulte, en vertu des formules générales (11) et (12) du paragraphe VIII,

$$(15) \qquad \varphi_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-2)^s \mathfrak{C}_{n-s+1}^s \, \omega_{n-s}(x)$$

$$(15 \text{ bis}) \qquad \omega_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} 2^s C_n^s \, \varphi_{n-s}(x),$$

tandis que nous aurons l'équation fonctionnelle

$$(16) \qquad \varphi_{n+1}(x) = 2x\varphi_n(x) - x\varphi_n(x+1),$$

obtenue immédiatement en différentiant par rapport à $\alpha$ la formule (14), puis appliquant l'identité évidente $e^\alpha = (e^\alpha + 1) - 1$.

Posons ensuite, conformément à (15),

$$(17) \quad \varphi_n(x) = a_{n,0}x^n + a_{n,1}x^{n-1} + \ldots + a_{n,p}x^{n-p} + \ldots + a_{n,n-1}x,$$

il résulte, en vertu de (16),

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{n+1,0} &= a_{n,0} = 1 \\ a_{n+1,r} &= a_{n,r} - \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{n-r}{r-s} a_{n,s}\,. \end{aligned} \right.$$

tandis que les formules (15) donnent respectivement

$$(19) \qquad a_{n,r} = \sum_{s=0}^{s=r} (-2)^s \mathfrak{C}_{n-s-1}^s \, C_{n-s}^{r-s}$$

$$(19 \text{ bis}) \qquad C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} 2^s C_n^s \, a_{n-s,r-s}\,.$$

On voit que les coefficients $a_{n,r}$, dont il s'agit ici, sont de la même forme que ceux de l'exemple précédent, de sorte qu'il existe une expression analogue à celle indiquée dans la formule (10), mais le polynome $g_r(x)$ correspondant est toujours du degré $r$ par rapport à $x$. On trouve ici

$$a_{n,0} = 1, \quad a_{n,1} = -\binom{n}{2}, \quad a_{n,2} = \binom{n}{3}\frac{3n-9}{4},$$

et les premiers des polynomes $\varphi_n(x)$ deviennent

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1 \\
\varphi_1(x) &= x \\
\varphi_2(x) &= x^2 - x \\
\varphi_3(x) &= x^3 - 3x^2 \\
\varphi_4(x) &= x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2x \\
\varphi_5(x) &= x^5 - 10x^4 + 15x^3 + 10x^2.
\end{aligned}$$

Remarquons que l'équation fonctionnelle (16) donnera

$$\varphi'_{n+1}(0) = -\varphi_n(1), \quad \varphi_n(2) = 2\varphi_n(1) - \varphi_{n+1}(1),$$

il résulte, en vertu de la série de puissances

$$\frac{1}{1+e^\alpha} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n T_n \alpha^{2n-1}}{(2n-1)!\, 2^{2n}}, \quad |\alpha| < \pi,$$

où les $T_n$ sont les coefficients des tangentes, les valeurs numériques

$$(20) \left\{ \begin{array}{ll}
\varphi'_{2n}(0) = (-1)^n T_n, & \varphi'_{2n+1}(0) = 0 \\
\varphi_{2n}(1) = 0, & \varphi_{2n+1}(1) = (-1)^n T_{n+1} \\
\varphi_{2n}(2) = (-1)^{n-1} T_{n+1}, & \varphi_{2n+1}(2) = (-1)^n 2T_{n+1}.
\end{array} \right.$$

On voit que ces formules donnent, en vertu de (15), des expressions explicites des coefficients des tangentes, expressions que j'ai étudiées dans une autre occasion.[1]

Posons, dans (14), $x = -1$, il résulte cette autre valeur numérique

$$(21) \qquad \varphi_n(-1) = (-1)^n 2^{n-1}.$$

[1] Annali di matematica (3) t. 19, p. 197—200; 1912.

# TROISIÈME PARTIE

## Les polynomes de Stirling.

### XI.—Évaluation des valeurs numériques.

Dans nos études suivantes sur les polynomes de Stirling nous appliquons indistinctement la définition élémentaire, à l'aide des nombres de Stirling, et la définition transcendante, à l'aide des deux séries de puissances (1) et (7) de l'article VI.

Les recherches plus profondes sur les polynomes $\psi_n(x)$ exigent des valeurs numériques qui sont des conséquences immédiates de la définition élémentaire.

En premier lieu, la formule (7) de l'article V donnera

$$\psi_n(n+1) = \frac{1}{n+2} \tag{1}$$

$$\psi_n(n+2) = \frac{1}{n+3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+2}\right), \tag{1 bis}$$

tandis que la formule (7 bis) du même article nous conduira à ces deux résultats

$$\psi_n(-2) = \frac{(-1)^n}{(n+2)!} \tag{2}$$

$$\psi_n(-3) = \frac{(-1)^n(2^{n+2}-1)}{(n+3)!}. \tag{2 bis}$$

En second lieu, il est évident que l'équation fonctionnelle

$$(x+2)\,\psi_n(x+1) = (x-n)\,\psi_n(x)+(x+1)\,\psi_{n-1}(x) \tag{3}$$

nous permet de déterminer d'autres valeurs numériques.

En effet, prenons pour point de départ les expressions

$$(4) \qquad \psi_{2n-1}(0) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}, \quad \psi_{2n}(0) = 0, \quad n \geqq 1,$$

indiquées dans les formules (9) et (10) de l'article V, nous aurons, en posant, dans (3), $x = -1$,

$$(5) \qquad \psi_{2n-1}(-1) = \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!\, 2n}, \quad \psi_{2n}(-1) = 0, \quad n \geqq 1,$$

tandis que la valeur

$$(6) \qquad \psi'_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1) B_n}{(2n)!\, 4n}, \quad n \geqq 1,$$

indiquée dans la formule (10 bis) de l'article V, donnera, en vertu de la relation

$$\psi'_{2n}(0) = -(2n+1)\psi'_{2n}(-1) + \psi_{2n-1}(-1),$$

tirée directement de (3),

$$(6 \text{ bis}) \qquad \psi'_{2n}(-1) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!\, 4n}.$$

Soit ensuite, dans (3), $x = 0$, la formule (4) donnera

$$(7) \qquad \psi_{2n-1}(1) = \frac{(-1)^n (2n-1) B_n}{(2n)!\, 2}, \quad n \geqq 2,$$

$$(7 \text{ bis}) \qquad \psi_{2n}(1) = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!\, 2}, \quad n \geqq 1,$$

tandis que nous aurons

$$\psi_0(1) = \frac{1}{2}, \quad \psi_1(1) = \frac{5}{24}.$$

Posons, encore, dans (3), $x = 1$, nous aurons

$$3\psi_n(2) = -(n-1)\psi_n(1) + 2\psi_{n-1}(1),$$

d'où, en vertu des formules (7),

$$(8) \qquad \psi_{2n}(2) = \psi_{2n-1}(1) = \frac{(-1)^n (2n-1) B_n}{(2n)!\, 2}$$

$$\text{(8 bis)} \quad \psi_{2n-1}(2) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)(2n-2)B_n}{2n!\,6} + \frac{(-1)^n B_{n-1}}{(2n-2)!\,3},$$

où il faut supposer $n \geqq 2$. Quant aux valeurs exclues qui correspondent à $n = 0, 1, 2$, un calcul direct donnera

$$\psi_0(2) = \frac{1}{2}, \quad \psi_1(2) = \frac{1}{3}, \quad \psi_2(2) = \frac{1}{8}.$$

Étudions maintenant les coefficients $\alpha_{n,r}$ du polynome $\psi_n(x)$, savoir

$$\text{(9)} \quad \psi_n(x) = \alpha_{n,0}x^n + \alpha_{n,1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n,r}x^{n-r} + \ldots + \alpha_{n,n},$$

nous avons, déjà dans l'article V, indiqué les résultats

$$\text{(10)} \qquad \alpha_{n,0} = \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}},$$

$$\text{(11)} \quad \alpha_{2n-1,2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}, \qquad \alpha_{2n,2n} = 0, \qquad n \geqq 1$$

$$\text{(12)} \qquad \alpha_{2n,2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)B_n}{(2n)!\,4n}, \qquad n \geqq 1.$$

Déterminons encore la valeur de

$$\alpha_{2n-1,2n-2} = \psi'_{2n-1}(0);$$

à cet effet, prenons pour point de départ la formule

$$\Psi_{4n}(x) = (x+1)\,x\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-2n+1)\,\psi_{2n-1}(x),$$

tirée directement de la définition de $\psi_{n-1}(x)$, savoir la formule (2) de l'article V. Appliquons ensuite le développement

$$(x+1)\,x\,(x-1)\ldots(x-2n+1) =$$
$$= -C_{2n}^{2n-1}\,x + (C_{2n}^{2n-2} - C_{2n}^{2n-1})\,x^2 + \ldots,$$

il résulte, en vertu de (9),

$$\Psi_{4n}(x) = -C_{2n}^{2n-1}\,\alpha_{2n-1,2n-1}x +$$
$$+ \left((C_{2n}^{2n-2} - C_{2n}^{2n-1})\,\alpha_{2n-1,2n-1} - C_{2n}^{2n-1}\,\alpha_{2n-1,2n-2}\right)x^2 + \ldots,$$

de sorte que les deux derniers coefficients de l'expression

$$\Psi_{4n}(x) = a_{2n,\,0}\, x^{4n} + a_{2n,\,1}\, x^{4n-1} + \ldots + a_{2n,\,4n-2}\, x^2 + a_{2n,\,4n-1}\, x$$

deviennent

$$a_{2n,\,4n-1} = (2n-1)!\, \alpha_{2n-1,\,2n-1}$$

$$a_{2n,\,4n-2} = \left(C_{2n}^{2n-2} - (2n-1)!\right) \alpha_{2n-1,\,2n-1} - (2n-1)!\, \alpha_{2n-1,\,2n-2}.$$

Cela posé, nous aurons évidemment

$$2n\, a_{2n,\,4n-2} = \frac{(-1)^{n-1} C_{2n}^{2n-2} B_n}{(2n-1)!} + (-1)^n B_n - (2n)!\, \alpha_{2n-1,\,2n-2},$$

d'où, en vertu de la formule (13 bis) de l'article IV,

$$(13) \quad (-1)^{n-1}(2n)!\, \alpha_{2n-1,\,2n-2} = \frac{B_n C_{2n}^{2n-2}}{(2n-1)!} - B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{B_s B_{n-s}}{2s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(13\text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n-1}(2n)!\, \psi'_{2n-1}(0) = \\ & = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) B_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{B_s B_{n-s}}{2s}; \end{aligned} \right.$$

dans ces deux formules il faut supposer naturellement $n \geqq 2$.

L'expression ainsi trouvée pour $\alpha_{2n-1,\,2n-2}$ montre clairement que la nature des coefficients $\alpha_{n,\,r}$ est très compliquée; dans l'article XIV nous avons à étudier, d'un autre point de vue, les coefficients $\alpha_{2n-1,\,2n-2}$.

Quant aux coefficients $\alpha_{n,\,r}$, remarquons encore que les expressions $\psi_n(1) \pm \psi_n(-1)$, formées en vertu des formules (5) et (7), donnent immédiatement

$$\alpha_{2n,\,0} + \alpha_{2n,\,2} + \ldots + \alpha_{2n,\,2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!\, 4}$$

$$\alpha_{2n,\,1} + \alpha_{2n,\,3} + \ldots + \alpha_{2n,\,2n-1} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n!)\, 4}$$

$$\alpha_{2n-1,\,0} + \alpha_{2n-1,\,2} + \ldots + \alpha_{2n-1,\,2n-2} = \frac{(-1)^n (2n-1)(n-1) B_n}{(2n)!\, 4n}$$

$$\alpha_{2n-1,\,1}+\alpha_{2n-1,\,3}+\ldots+\alpha_{2n-1,\,2n-1}=\frac{(-1)^n(2n-1)(n+1)B_n}{(2n)!\,4n}.$$

Il saute aux yeux que les valeurs numériques, que nous venons de démontrer, montrent clairement que les coefficients $\alpha_{n,\,r}$ sont intimement liés aux nombres de Bernoulli, mais qu'ils sont d'une nature beaucoup plus compliquée.

Revenons maintenant à l'équation fonctionnelle (3), puis posons $x+n$ au lieu de $x$, il résulte

$$(x+n+2)\,\psi_n(x+n+1)=x\psi_n(x+n)+(x+n+1)\,\psi_{n-1}(x+n),$$

formule récursive qui donnera immédiatement

$$(14)\quad (x+n+2)\,\psi_n\,(x+n+1)\;=\;1+x\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\psi_s(x+s);$$

posons, dans cette dernière formule $x=0$, puis $x=1$, nous retrouvons les formules (2).

## XII.— Applications des nombres de Stirling.

Le calcul direct des polynomes de Stirling étant très compliqué, nous avons à développer une suite de formules récursives qui nous permettent de calculer successivement les polynomes en question.

En premier lieu, remarquons que l'introduction des polynomes $\Psi_{2r}(x)$ nous permet de généraliser beaucoup les formules numériques (3) de l'article II. A cet effet, écrivons, en vertu des formules (7) de l'article IV, la première des formules en question sous la forme

$$\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\,\Psi_{2r-2s}(n+p)\,\Psi_{2s}(-n-1)=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=r}\binom{p-s}{r-s}(n+1)^{r-s}\,\Psi_{2s}(p-1),$$

je dis que nous aurons tout d'abord l'identité algébrique

$$
(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \Psi_{2r-2s}(y)\, \Psi_{2s}(-n-1) = \\ \displaystyle = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{y-n-s}{r-s} (n+1)^{r-s}\, \Psi_{2s}(y-n-1)\,, \end{cases}
$$

où $y$ désigne une variable complexe quelconque, tandis que $n$ est un positif entier fixe, mais arbitraire du reste.

En effet, l'équation algébrique (1), du degré $2r$ par rapport à $y$ au plus, admet comme racines toutes les valeurs de la forme $y = n + p$, où $p$ est un nombre entier plus grand que $r$.

Cela posé, nous aurons l'identité algébrique beaucoup plus générale

$$
(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \Psi_{2s}(x)\, \Psi_{2r-2s}(y) = \\ \displaystyle = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{r-s} \binom{x+y-s+1}{r-s} x^{r-s}\, \Psi_{2s}(x+y) \end{cases}
$$

où $x$ est une nouvelle variable complexe quelconque. En effet, soit $y$ un nombre fixe, l'équation (2) admet comme racines $x = -n-1$, où $n$ désigne un positif entier quelconque.

Soit maintenant, dans (2), $y = 0$, le premier membre se réduit à son dernier terme, de sorte que nous aurons la formule récursive

$$
(3)\quad \left(1-(-1)^r\right) \Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{x-s+1}{r-s} x^{r-s}\, \Psi_{2s}(x),
$$

d'où, en introduisant, en vertu de la définition (2) de l'article V, les polynomes de Stirling, puis posant $r+1$ au lieu de $r$,

$$(4)\quad \left(1+(-1)^r\right)(x-r)\,\psi_r(x) = \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} - \sum_{s=0}^{s=r-1} \frac{(-1)^s (x-s)\, x^{r-s}}{(r-s)!}\, \psi_s(x),$$

où il faut supposer naturellement $r \geqq 1$.

Posons ensuite, dans (2), $y = x$, puis supposons impair le nombre $r$, le premier membre de la formule en question s'évanouira, et nous aurons, en remplaçant $r$ par $2r+1$ et $x$ par $\frac{x}{2}$,

$$(5)\quad \Psi_{4r+2}(x) = \sum_{s=0}^{s=2r} (-1)^s \binom{x-2r+s+1}{s+1} \left(\frac{x}{2}\right)^{s+1} \Psi_{4r-2s}(x),$$

ce qui donnera, pour les polynomes de Stirling,

$$(6)\quad \begin{cases} (x-2r)\,\psi_{2r}(x) = \\ = \dfrac{x^{2r+1}}{(2r+1)!\,2^{2r+1}} + \displaystyle\sum_{s=0}^{s=2r-1} \frac{(-1)^s (x-2r+s+1)}{(s+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{s+1} \psi_{2r-s-1}(x). \end{cases}$$

Quant à la formule (3 bis) de l'article II, savoir

$$\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \Psi_{2s}(n)\, \Psi_{2r-2s}(-n-p-1) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p+r-1}{r-s} (n+1)^{r-s}\, \Psi_{2s}(-p),$$

nous posons

$$n = x, \quad -n-p-1 = y, \quad -p = x+y+1,$$

et une simple réduction donnera l'identité algébrique

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s\, \Psi_{2s}(x)\, \Psi_{2r-2s}(y) = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^{r-s} \binom{x+y-s+1}{r-s} (x+1)^{r-s}\, \Psi_{2s}(x+y+1), \end{cases}$$

où $x$ et $y$ sont des variables complexes quelconques.

Posons, en premier lieu, $y = -1$, il résulte

$$(8)\quad \left(1-(-1)^r\right)\Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s\binom{x-s}{r-s}(x+1)^{r-s}\,\Psi_{2s}(x),$$

d'où, en introduisant les polynomes de Stirling, puis remplaçant $r$ par $r+1$,

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} & \left(1+(-1)^r\right)\psi_r(x) = \\ & = \frac{(x+1)^r}{(r+1)\,!} - \sum_{s=0}^{s=r-1}\frac{(-1)^s(x+1)^{r-s}}{(r-s)\,!}\,\psi_s(x), \end{aligned} \right.$$

où il faut supposer naturellement $r \geqq 1$.

Soit ensuite, dans (7), $r$ un nombre impair, l'hypothèse $y = x$ donnera

$$0 = \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^{r-s}\binom{2x-s+1}{r-s}(x+1)^{r-s}\,\Psi_{2s}(2x+1),$$

d'où, en introduisant $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ au lieu de $x$, $2r+1$ au lieu de $r$,

$$(10)\quad \Psi_{4r+2}(x) = \sum_{s=0}^{s=2r}(-1)^s\binom{x-s}{2r-s+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-s+1}\Psi_{2s}(x),$$

de sorte que nous aurons pour les polynomes de Stirling

$$(11)\quad \psi_{2r}(x) = \frac{(x+1)^{2r}}{(2r+1)\,!\,2^{2r+1}} - \sum_{s=0}^{s=2r-1}\frac{(-1)^s}{(2r-s)\,!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-s}\psi_s(x).$$

Il est curieux, ce me semble, que les formules récursives, tirées de l'identité (7), soient des conséquences immédiates de la théorie des polynomes symétriques, nous le verrons dans l'article qui suit. De plus, posons, dans l'identité (21) de l'article VI, $y = 0$, nous retrouvons précisément la formule (9).

Quant aux quatre formules récursives, ainsi obtenues pour les polynomes de Stirling, il est évident qu'elles nous permettent de calculer les $\psi_{2r}(x)$ à l'aide de $\psi_s(x)$, où $s < 2r$, tandis que ces formules ne présentent aucun moyen pour le calcul des $\psi_{2r+1}(x)$ à l'aide des polynomes précédents. Pour obtenir des formules récursives de ce genre nous posons, dans (2), $x = -1$, puis introduisons $x+1$ au lieu de $y$, ce qui donnera

$$\Psi_{2r}(x+1) - \Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{x-s+1}{r-s} \Psi_{2s}(x).$$

Appliquons ensuite l'équation fonctionnelle (8) de l'article IV, puis remplaçons $r$ par $r+1$, il résulte finalement

$$r\Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1} \binom{x-s+1}{r-s+1} \Psi_{2s}(x), \tag{12}$$

ce qui donnera pour les polynomes de Stirling, si nous remplaçons encore une fois $r$ par $r+1$,

$$(r+1)\psi_r(x) = \frac{1}{(r+2)!} + \sum_{s=0}^{s=r-1} \frac{(x-s)\psi_s(x)}{(r-s+1)!}. \tag{13}$$

Une autre formule de ce genre peut être déduite de l'identité (2), en y posant $y = -1$, puis remplaçant $x$ par $x+1$, ce qui donnera, en vertu de l'équation fonctionnelle (8) de l'article IV,

$$\left\{\begin{aligned} &(x-r+3)\Psi_{2r}(x) = \\ &= \sum_{s=1}^{s=r} (-1)^{s-1} \binom{x-r+s+1}{s+1} (x+1)^s \Psi_{2r-2s}(x), \end{aligned}\right. \tag{14}$$

d'où, en introduisant les polynomes de Stirling, puis posant $r+1$ au lieu de $r$,

$$\left\{\begin{aligned} &(x-r+2)\psi_r(x) = \frac{(-1)^{r-1}(x+1)^r}{(r+2)!} + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=r} \frac{(-1)^{s-1}(x+1)^s(x-r+s)}{(s+1)} \psi_{r-s}(x), \end{aligned}\right. \tag{15}$$

formule qui est plus compliquée que la précédente.

## XIII.—Applications des polynomes symétriques.

Remarquons que le polynome du degré $n$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{n+1}\right)\left(x + \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(x + \frac{n}{n+1}\right),$$

ou, ce qui est évidemment la même chose,

$$f(x) = x^n + \frac{C_{n+1}^1 x^{n-1}}{n+1} + \cdots + \frac{C_{n+1}^r x^{n-r}}{(n+1)^r} + \cdots + \frac{C_{n+1}^n}{(n+1)^n}$$

est symétrique, savoir qu'il satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(-x-1) = (-1)^n f(x),$$

les formules générales, valables pour les polynomes symétriques [1], donnent immédiatement, dans le cas spécial dont il s'agit ici,

$$(1) \quad \left(1-(-1)^r\right) C_{n+1}^r = \sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{n-s}{r-s} (n+1)^{r-s} C_{n+1}^s$$

$$(2) \quad C_{n+1}^{2r+1} = \sum_{s=0}^{s=2r} (-1)^s \binom{n-s}{2r-s+1} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r-s+1} C_{n+1}^s$$

$$(3) \quad \begin{cases} (-1)^r \left(C_{n+1}^{2r+1} - \dfrac{(n+1)(n-2r)}{2} C_{n+1}^{2r}\right) = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r-1} (-1)^s \binom{n-2s+1}{2r-2s} (n+1)^{2r-2s} B_{r-s} C_{n+1}^{2s+1} \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} (-1)^r C_{n+1}^{2r+1} = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n-2s}{2r-2s+1} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2r-2s+1} T_{r-s+1} C_{n+1}^{2s}, \end{cases}$$

où les $B_s$ et les $T_s$ désignent les nombres de Bernoulli respectivement les coefficients des tangentes.

On sait que ces quatre formules sont équivalentes, de sorte qu'une seule de ces formules entraîne nécessairement

[1] Voir mon Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli, articles XXI et XXIV.

les trois autres. De plus, il est évident que les formules en question permettent de calculer les $C_{n+1}^{2r+1}$ à l'aide des $C_{n+1}^{s}$ aux indices inférieurs.

Cela posé, la méthode ordinaire donnera immédiatement les identités algébriques

$$(5)\quad \left(1-(-1)^r\right)\Psi_{2r}(x) = \sum_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s\binom{x-s}{r-s}(x+1)^{r-s}\Psi_{2s}(x)$$

$$(6)\quad \Psi_{4r+2}(x) = \sum_{s=0}^{s=2r}(-1)^s\binom{x-s}{2r-s+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-s+1}\Psi_{2s}(x)$$

$$(7)\quad \begin{cases} (-1)^r\left(\Psi_{4r+2}(x)-\dfrac{(x+1)(x-2r)}{2}\Psi_{4r}(x)\right) = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s\binom{x-2s+1}{2r-2s}(x+1)^{2r-2s}B_{r-s}\Psi_{4s+2}(x) \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} (-1)^r\Psi_{4r+2}(x) = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\binom{x-2s}{2r-2s+1}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-2s+1}T_{r-s+1}\Psi_{4s}(x), \end{cases}$$

où $x$ désigne une variable complexe quelconque, ce qui donnera pour les polynomes de STIRLING

$$(9)\quad \left(1+(-1)^r\right)\psi_r(x) = \frac{(x+1)^r}{(r+1)!}-\sum_{s=0}^{s=r-1}\frac{(-1)^s(x+1)^{r-s}}{(r-s)!}\psi_s(x)$$

$$(10)\quad \psi_{2r}(x) = \frac{(x+1)^{2r}}{(2r+1)!\,2^{2r+1}}-\sum_{s=0}^{s=2r-1}\frac{(-1)^s\psi_s(x)}{(2r-s)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-s}$$

$$(11)\quad \begin{cases} (-1)^r\left(\psi_{2r}(x)-\dfrac{x+1}{2}\psi_{2r-1}(x)\right) = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=r-1}\frac{(-1)^s(x+1)^{2r-2s}}{(2r-2s)!}B_{r-s}\psi_{2s}(x) \end{cases}$$

$$(12)\left\{\begin{aligned}(-1)^r\psi_{2r}(x) &= \frac{T_{r+1}(x+1)^{2r}}{(2r+1)!\,2^{2r+1}} - \\ &-\sum_{s=0}^{s=r-1}\frac{(-1)^s T_{r-s}}{(2r-2s-1)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2r-2s-1}\psi_{2s+1}(x).\end{aligned}\right.$$

Il saute aux yeux que la dernière de ces quatre formules récursives est la plus simple, parce qu'elle permet de calculer $\psi_{2s}(x)$, seulement à l'aide des $\psi_{2r+1}(x)$ qui correspondent à des indices inférieurs. On voit du reste que les formules (9) et (10) sont identiques à (9) et (11) de l'article précédent.

Soit $x = 0$, il résulte, en vertu de (9), (10), (12),

$$(13)\qquad \frac{r-1}{2} = \sum_{s=1}^{\leq\frac{r-1}{2}}(-1)^{s-1}\binom{r+1}{2s}B_s$$

$$(14)\qquad 2r = \sum_{s=1}^{s=r}(-1)^{s-1}\binom{2r+1}{2s}2^{2s}B_s$$

$$(15)\qquad T_{r+1} = \sum_{s=0}^{s=r-1}\binom{2r+1}{2s+1}2^{2r-2s}B_{r-s}T_{s+1},$$

tandis que la formule (11) ne donne qu'une nouvelle détermination de la valeur numérique $\psi_{2r-1}(0)$.

La formule (13) n'est autre chose que la formule récursive de Jacques Bernoulli [1], faussement attribuée à Moivre [2] respectivement à Jacobi [3], selon que $r$ est supposé pair ou impair; la formule (14) est due à Euler [4].

Revenons maintenant aux formules récursives contenant les polynomes $\Psi_{2m}(x)$, puis posons $x = -n-1$, où $n$

1 Ars conjectandi, p. 97; Bâle 1713.
2 Miscellanea analytica; Londres 1730.
3 Journal de Crelle, t. 11, p. 265; 1834.
4 Opuscula analytica, t. II, p. 264–265; Pétrograde 1785.

désigne un positif entier, il résulte, pour les nombres de Stirling de seconde espèce,

$$(16)\qquad \left(1-(-1)^r\right)\mathfrak{S}_{n+1}^r=\sum_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s\binom{n+s+1}{r-s}n^{r-s}\,\mathfrak{S}_{n+1}^s$$

$$(17)\qquad \mathfrak{S}_{n+1}^{2r+1}=\sum_{s=0}^{s=2r}(-1)^s\binom{n+s+1}{2r-s+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{2r-s+1}\mathfrak{S}_{n+1}^s$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned}&(-1)^r\left(\mathfrak{S}_{n+1}^{2r+1}-\frac{n\,(n+2r+1)}{2}\mathfrak{S}_{n+1}^{2r}\right)=\\&=\sum_{s=0}^{s=r-1}(-1)^s\binom{n+2s}{2r-2s}n^{2r-2s}\,B_{r-s}\,\mathfrak{S}_{n+1}^{2s+1}\end{aligned}\right.$$

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned}&(-1)^r\,\mathfrak{S}_{n+1}^{2r+1}=\\&=\sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\binom{n+2s+1}{2r-2s+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{2r-2s+1}T_{r-s+1}\,\mathfrak{S}_{n+1}^{2s},\end{aligned}\right.$$

formules qui sont analogues à celles indiquées pour les nombres de Stirling de première espèce, et que l'on peut déduire aussi, à l'aide de la théorie des polynomes symétriques.[1]

## XIV. — D'autres formules récursives.

Une autre classe de formules récursives peut être établie à l'aide de la définition des nombres de Stirling de première espèce, savoir

$$x\,(x+1)\,(x+2)\dots(x+p)=x^{p+1}+C_{p+1}^1\,x^p+\dots+C_{p+1}^p\,x.$$

A cet effet, posons, dans cette formule, successivement

$$x=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,$$

[1] Voir mon Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli, article LXXXII.

puis ajoutons toutes les équations ainsi obtenues, il résulte, en vertu d'une formule élémentaire bien connue,

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+p+1)}{p+2} =$$
$$= S_{p+1}(n) + C_{p+1}^{1} S_p(n) + \ldots + C_{p+1}^{p} S_1(n),$$

équation numérique qui est applicable, pourvu que $n$ soit un positif entier quelconque, et qui est par conséquent équivalente à l'identité algébrique

$$\frac{x(x+1)\ldots(x+p+1)}{p+2} =$$
$$= \Phi_{p+2}(x) + C_{p+1}^{1} \Phi_{p+1}(x) + \ldots + C_{p+1}^{p} \Phi_2(x),$$

où $x$ désigne une variable complexe quelconque.

Cherchons maintenant, dans cette identité algébrique, le coefficient de la puissance $x^{p-r+2}$, il résulte, pourvu que $2 \leq r \leq p$,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{C_{p+2}^{r}}{p+2} = \frac{C_{p+1}^{r}}{p-r+2} + \frac{C_{p+1}^{r-1}}{2} - \\ & - \sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{2s} \binom{p-r+2s+1}{2s-1} C_{p+1}^{r-2s}\, ; \end{aligned} \right.$$

le cas particulier $r = 1$ conduira à une trivialité, tandis que l'hypothèse $r = p+1$ donnera la formule de SCHLÖMILCH

$$(2) \qquad \frac{p!\,p}{2p+4} = \sum_{s=1}^{\leq \frac{p+1}{2}} (-1)^{s-1} B_s\, C_{p+1}^{p-2s+1},$$

savoir la formule (3) de l'article IX.

Revenons maintenant à la formule générale (1), puis éliminons, en vertu de la formule récursive

$$C_{p+2}^{r} = C_{p+1}^{r} + (p+1)\, C_{p+1}^{r-1},$$

le nombre $C_{p+2}^{r}$, il résulte, après une simple réduction,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r\, C_{p+1}^{r}}{p+2} &= \frac{p\,(p-r+2)}{2p+4}\, C_{p-1}^{r-1} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2}} (-1)^{s} \binom{p-s+2s+1}{2s} B_s\, C_{p+1}^{r-2s}, \end{aligned} \right.$$

équation numérique qui est valable, pourvu que $p$ soit un positif entier plus grand que $r-1$, et qui est par conséquent équivalente à l'identité algébrique

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{r\, \Psi_{2r}(x)}{x+2} &= \frac{x\,(x+r-2)\, \Psi_{2r-2}(x)}{2x+4} + \\ &+ \sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2}} (-1)^{s} \binom{x-r+2s+1}{2s} B_s\, \Psi_{2r-4s}(x), \end{aligned} \right.$$

où $x$ désigne une variable complexe quelconque, la valeur $x=-2$ étant exclue, mais multiplions par $x+2$ les deux membres de la formule en question, il est évident que cette valeur de $x$ est aussi applicable.

Quant aux polynomes de Stirling, il faut, dans (4), étudier séparément les deux cas qui correspondent à des valeurs paires et impaires de $n$. Appliquons ensuite les valeurs de $\psi_m(0)$, indiquées dans l'article XI, il résulte finalement

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} (r+1)\,(x-r)\,\psi_r(x) &= \frac{x\,(x-r+1)}{2}\,\psi_{r-1}(x) - (x+2)\,\psi_r(0) + \\ &+ (x+2)\cdot \sum_{s=1}^{\leq \frac{r}{2}} \frac{(-1)^{s}\,(x-r+2s)}{(2s)!} B_s\, \psi_{r-2s}(x), \end{aligned} \right.$$

où il faut supposer naturellement $r \geqq 2$.

Posons encore, dans (4), $x=-p-1$, où $p$ désigne un positif entier plus grand que 1, il résulte, pour les nombres de Stirling de seconde espèce,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{r\,\mathfrak{C}_{p+1}^{r}}{p-1} = \frac{(p+1)(p-r+3)\,\mathfrak{C}_{p+1}^{r-1}}{2p-2} - \\ &-\sum_{s=1}^{\leq\frac{r}{2}} (-1)^s \binom{p+r-1}{2s} B_s\,\mathfrak{C}_{p+1}^{r-2s}, \end{aligned}\right.$$

formule récursive qui est analogue à la formule (3) concernant les nombres de STIRLING de première espèce.

Revenons maintenant à la définition transcendante des polynomes de STIRLING, la formule (22) de l'article VI donnera pour $y = 0$

$$(x+2)\,\psi_r(x+1) =$$
$$= (x+1)\,\psi_r(x) + \psi_r(0) + (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=r-1} \psi_s(0)\,\psi_{r-s-1}(x),$$

d'où, en éliminant, en vertu de l'équation fonctionnelle (3) de l'article XI, la fonction $\psi_r(x+1)$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(r+1)\,\psi_r(x) = \\ &= \frac{x+1}{2}\psi_{r-1}(x) - \psi_r(0) + (x+1)\cdot\sum_{s=1}^{\leq\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\psi_{r-2s}(x), \end{aligned}\right.$$

formule récursive qui est analogue à (5), mais plus simple, parce que le facteur de $\psi_r(x)$ est une constante.

Or, on voit qu'une combinaison de ces deux formules conduira à une relation encore plus simple. En effet, multiplions par $x+2$ les deux membres de (7), puis soustrayons (5) de la formule ainsi obtenue, il résulte

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &(r+1)(r+2)\,\psi_r(x) = \left(\left(\frac{r}{2}+1\right)x+1\right)\psi_{r-1}(x) + \\ &+(x+2)\cdot\sum_{s=1}^{\leq\frac{r}{2}} \frac{(-1)^s (r-2s+1)\,B_s}{(2s)!}\psi_{r-2s}(x). \end{aligned}\right.$$

Il est évident que cette dernière formule récursive conduira à des relations numériques intéressantes. Soit, en premier lieu, $r$ un nombre impair, savoir $r = 2n - 1$, l'hypothèse $x = 0$ donnera

$$(9) \qquad n(2n+1) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} (2n-2s) B_s B_{n-s},$$

où, ce qui est évidemment la même chose,

$$(10) \qquad \left(n + \frac{1}{2}\right) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s} B_s B_{n-s}.$$

Écrivons maintenant dans l'ordre inverse les termes qui figurent au second membre de cette dernière formule, nous aurons

$$(10 \text{ bis}) \qquad \left(n + \frac{1}{2}\right) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n-1}{2s-1} B_s B_{n-s},$$

d'où, en ajoutant (10) et (10 bis),

$$(11) \qquad (2n+1) B_n = \sum_{s=1}^{s=n-1} \binom{2n}{2s} B_s B_{n-s};$$

cette formule est due à Euler[1], et il est évident qu'elle est équivalente à (10) et à (10 bis).

En second lieu, posons $r = 2n$, puis différentions par rapport à $x$ les deux membres de la formule ainsi obtenue, nous aurons, en posant $x = 0$,

$$(2n+1)(2n+2)\psi'_{2n}(0) = (n+1)\psi_{2n-1}(0) + \psi'_{2n-1}(0) +$$
$$+ \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!\,2} + 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2n-2s+1) B_s}{(2s)!} \psi'_{2n-2s}(0),$$

d'où, en multipliant par $(2n)!$, puis appliquant les valeurs numériques indiquées dans l'article XI,

[1] Opuscula analytica, t. II, p. 266; Pétrograde 1785.

$$\frac{(2n+1)(n+1)(2n-1)B_n}{2n} = \frac{2n+1}{2}B_n + (-1)^{n-1}(2n)!\,\psi'_{2n-1}(0) +$$
$$+\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}\left(2n-2s-\frac{1}{2n-2s}\right)B_s B_{n-s}.$$

Appliquons ensuite la formule (9), il résulte finalement

$$(12)\quad (-1)^n(2n)!\,\psi'_{2n-1}(0) = \frac{2n+1}{2n}B_n - \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}\frac{B_s B_{n-s}}{2s},$$

expression qui est formellement différente de celle que nous avons développée dans la formule (13 bis) de l'article XI. Or, ajoutons les deux formules en question, il résulte

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)B_n = \\ &= \sum_{s=1}^{s=n-1}\left(\binom{2n}{2s}-1\right)\frac{B_s B_{n-s}}{2s}; \end{aligned}\right.$$

cette formule récursive pour les nombres de Bernoulli, très curieuse ce me semble, est certainement nouvelle.

Nous avons encore à étudier le cas particulier de la formule (23) de l'article VI, qui correspond à $y = 0$, savoir

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &B_{n+1}(x) - (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\,\psi_s(x)\,B_{n-s}(x) = \\ &= (x+1)\psi_n(x) - (-1)^n\psi_n(0) - (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\,\psi_s(0)\,\psi_{n-s-1}( \end{aligned}\right.$$

appliquons ensuite la formule (7), il résulte pour $n$ pair

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &B_{2n+1}(x) = (2x-2n+1)\,\psi_{2n}(x) + \\ &+ (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=2n-1}(-1)^s\,\psi_s(x)\,B_{2n-s}(x), \end{aligned}\right.$$

tandis que l'hypothèse $n$ impair donnera de même

$$(15\text{ bis})\quad \left\{\begin{aligned} B_{2n}(x) &= -2n\,\psi_{2n-1}(x) + \\ &+ (x+1)\cdot\sum_{s=0}^{s=2n-2}(-1)^s\psi_s(x)\,B_{2n-s-1}(x). \end{aligned}\right.$$

Dans ces deux formules il faut supposer $n \geqq 1$.

Différentions maintenant par rapport à $x$ les deux membres de (15 bis), puis posons $x = -1$, nous aurons

$$2n\,\psi'_{2n-1}(-1) = -\sum_{s=0}^{s=n-2}\psi_{2s+1}(-1)\,B_{2n-2s-2}(-1),$$

d'où, après une simple réduction,

$$(-1)^n\,2n\cdot(2n)!\,\psi'_{2n-1}(-1) = \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}\frac{B_s\,B_{n-s}}{2s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(-1)^n(2n)!\,\psi'_{2n-1}(-1) = \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n-1}{2s}\frac{B_s\,B_{n-s}}{2s(2n-2s)},$$

savoir

$$(-1)^n(2n)!\,\psi'_{2n-1}(-1) = \sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n-1}{2s-1}\frac{B_s\,B_{n-s}}{2s(2n-2s)},$$

ce qui donnera finalement le résultat numérique curieux

$$(16)\quad (-1)^n(2n)!\,\psi'_{2n-1}(-1) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{s=1}^{s=n-1}\binom{2n}{2s}\frac{B_s\,B_{n-s}}{2s(2n-2s)},$$

analogue à (12) du reste. Ajoutons ces deux formules, nous aurons

$$(17)\quad \psi'_{2n-1}(0) + 2n\,\psi'_{2n-1}(-1) = \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!\,2n}B_n,$$

ce qui donnera, pour les coefficients $\alpha_{2n-1,r}$ du polynome $\psi_{2n-1}(x)$,

$$(18)\quad \alpha_{2n-1,\,2n-2} + \sum_{s=0}^{s=2n-3}\frac{(-1)^s(2n-s-1)}{2n+1}\alpha_{2n+1,\,s} = \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!\,2n},$$

d'où, en vertu de la formule (5) de l'article XI

$$(19)\quad \sum_{s=0}^{s=2n-3} (-1)^s (s+2)\, \alpha_{2n-1,\, s} = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)(2n+1)}{(2n)!\, n} B_n.$$

Ces résultats numériques montrent clairement que les coefficients compliqués $\alpha_{n,\,r}$ sont intimement liés aux nombres de BERNOULLI.

## XV.— Expressions explicites.

La littérature extrêmement riche qui traite plus ou moins profondément les nombres de STIRLING, présente plusieurs expressions explicites des nombres susdits.

CAUCHY[1] a par exemple pris pour point de départ la formule (18) de l'article VI; introduisant, au premier membre, la série de puissances de la fonction exponentielle, puis appliquant la formule polynomiale, il obtient une expression explicite de $\mathfrak{C}_{p+1}^{n}$, mais cette expression est parfaitement inapplicable pour un calcul pratique. Remarquons que la même méthode donnera, en vertu de la formule (17) de l'article susdit, une expression explicite de $C_{p+n}^{n}$.

SCHLÄFLI[2] a donné d'autres expressions explicites des $C_n^p$ — but this law is a very complicated one — dit CAYLEY[3] et avec raison, parce que SCHLÄFLI exprime les $C_n^p$ par des sommes multiples. Or, les formules de CAYLEY ne disent rien sur la nature des nombres $C_n^p$, et c'est la même chose pour les expressions, formées à l'aide des déterminants, données par VON ZEIPEL.[4] C'est pourquoi nous avons à établir

1 Exercises de Mathématiques, III^e année, p. 145—147; Paris 1828.

2 Journal de Crelle, t. 43, p. 1—22; 1852.

3 Quarterly Journal of Mathematics, t. 3, p. 308; 1860.

4 Annuaire de l'Université de Lund (en suédois) 1870.

d'autres expressions explicites des polynomes $\Psi_{2n}(x)$ et des $\psi_n(x)$.

A cet effet, prenons pour point de départ l'identité[1]

$$(1) \qquad f(x) = x\binom{x+n}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s}{x+s}\binom{n}{s} f(-s),$$

où $f(x)$ désigne un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à $x$.

Étudions tout d'abord la fonction $\Psi_{2n}(x)$, les valeurs numériques

$$\Psi_{2n}(0) = 0, \quad \Psi_{2n}(-1) = 0, \quad \Psi_{2n}(-s) = \mathfrak{C}_s^n, \qquad s \geqq 2,$$

donnent immédiatement, en vertu de (1),

$$(2) \qquad \Psi_{2n}(x) = x\binom{x+2n}{2n} \cdot \sum_{s=2}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{x+s}\binom{2n}{s} \mathfrak{C}_s^n .$$

On voit que cette formule est un peu compliquée, parce qu'elle n'indique pas directement que $\Psi_{2n}(x)$ est divisible par le produit

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n+1);$$

c'est-à-dire que nous aurons les formules numériques

$$(3) \qquad \sum_{s=2}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{r+s}\binom{2n}{s} \mathfrak{C}_s^n = 0, \qquad 1 \leqq r \leqq n-1,$$

tandis que la valeur

$$\Psi_{2n}(n) = C_{n+1}^n = n!$$

donnera de même, en vertu de (2),

$$(3 \text{ bis}) \qquad \frac{(n-1)!\, n!\, (2n)!}{(3n)!} = \sum_{s=2}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{n+s}\binom{2n}{s} \mathfrak{C}_s^n .$$

Il saute aux yeux que la formule (2) ne donne aucune expression simple des polynomes $\psi_n(x)$. Or, appliquons

[1] Voir mon Traité élémentaire des Nombres de Bernoulli, article VIII.

l'identité (1), les valeurs numériques

$$\psi_{2n}(0) = 0, \quad \psi_{2n}(-1) = 0,$$

$$\psi_n(-s) = \frac{(-1)^{n-1}(s-2)!\,\mathfrak{C}_s^{n+1}}{(s+n)!}, \quad s \geqq 2,$$

donnent immédiatement

$$(4) \quad \psi_{2n}(x) = x\binom{x+2n}{2n}\sum_{s=2}^{s=2n}\frac{(-1)^s}{x+s}\binom{2n}{s}\frac{(s-2)!\,\mathfrak{C}_s^{2n+1}}{(2n+s)!}.$$

Quant à $\psi_{2n-1}(x)$, il résulte de même, en vertu des valeurs numériques

$$\psi_{2n-1}(0) = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!}, \quad \psi_{2n-1}(-1) = \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!\,2n},$$

indiquées dans l'article XI, l'expression explicite

$$(4\text{ bis})\left\{\begin{aligned}\psi_{2n-1}(x) = x\binom{x+2n-1}{2n-1}\Bigg(&\frac{(-1)^{n-1}B_n\left((2n+1)x+2n\right)}{(2n)!\,2nx(x+1)} - \\ &-\sum_{s=2}^{s=2n-1}\frac{(-1)^s}{x+s}\binom{2n-1}{s}\frac{(s-2)!\,\mathfrak{C}_s^{2n}}{(2n+s-1)!}\Bigg),\end{aligned}\right.$$

expression qui est plus compliquée que (4). Dans la formule (4 bis) il faut naturellement supposer $n \geqq 2$; soit $n = 1$, la somme qui figure au second membre est à supprimer.

Appliquons maintenant les valeurs de $\psi'_{2n}(0)$ et de $\psi'_{2n}(-1)$, indiquées dans l'article XI, il résulte, en vertu de (4), les deux expressions explicites des nombres de Bernoulli:

$$(5) \quad \sum_{s=2}^{s=2n}\frac{(-1)^s}{(s-1)s^2}\binom{4n}{2n-s}\mathfrak{C}_s^{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{4n}\binom{4n}{2n}B_n$$

$$(5\text{ bis}) \quad \sum_{s=2}^{s=2n}\frac{(-1)^s}{(s-1)^2 s}\binom{4n}{2n-s}\mathfrak{C}_s^{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\binom{4n}{2n}B_n,$$

d'où, en soustrayant,

$$(6)\qquad \sum_{s=2}^{s=2n} \frac{(-1)^s}{(s-1)^2 s^2}\binom{4n}{2n-s}\mathfrak{C}_s^{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{4n-1}{2n} B_n .$$

Quant aux polynomes $\Psi_{2m}(x)$, la formule

$$\Psi_{2m}(x) = (x+1)\,x\,(x-1)\ldots(x-m+1)\,\psi_{m-1}(x)$$

donnera immédiatement, en vertu des formules (4), des expressions explicites, dont celle de $\Psi_{4n}(x)$ devient un peu compliquée.

Revenons maintenant à la formule (4) de l'article VI, savoir

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty}\binom{x+r}{r}\left(1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^r,$$

nous avons démontré, dans l'article susdit, qu'il existe, pour une valeur fixe mais quelconque de $x$, un nombre positif $k$, tel que la série qui figure au second membre est uniformément convergente, pourvu que $|\alpha| \leqq k$, de sorte qu'il est permis d'ordonner formellement, d'après des puissances ascendantes, de $\alpha$, la série en question.

A cet effet, appliquons l'identité

$$\left(1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^r = \sum_{s=0}^{s=r}(-1)^s\binom{r}{s}\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^s,$$

il est évident que le coefficient $A_{r,n}$ de la puissance $\alpha^n$, provenant de ce terme, deviendra, en vertu de la définition (1) de l'article VI,

$$(7)\qquad A_{r,n} = \sum_{s=1}^{s=r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}\, s\, \psi_{n-1}(-s-1),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(7\text{ bis})\qquad A_{r,n} = \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!}\cdot\sum_{s=1}^{s=r}\frac{(-1)^{n+s}}{s!}\binom{n+r}{r-s}\mathfrak{C}_{s+1}^{n},$$

ce qui donnera l'expression explicite de $\psi_{n-1}(x)$:

$$(8) \quad (x+1)\,\psi_{n-1}(x) = \sum_{s=n}^{s=n} \binom{x+s}{s} A_{s,n}, \quad n \geqq 1.$$

Cela posé, cherchons, au second membre de (8), le coefficient $\alpha_r$ de la fonction $\psi_{n-1}(-r-1)$, il résulte, en vertu de (7),

$$\alpha_r = (-1)^{r-1}\, r \cdot \sum_{s=0}^{s=n-r} \binom{r+s}{r} \binom{x+r+s}{r+s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\alpha_r = (-1)^{r-1}\, r \binom{x+r}{r} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-r} \binom{x+r+s}{s},$$

de sorte que nous aurons

$$\alpha_r = (-1)^{r-1}\, r \binom{x+r}{r} \binom{x+n+1}{n-r},$$

savoir

$$\alpha_r = \frac{(-1)^{r-1}\, r\,(x+1)}{x+r+1} \binom{x+n+1}{n} \binom{n}{r},$$

ce qui donnera

$$(9) \quad \begin{cases} \psi_{n-1}(x) = \\ = \binom{x+n+1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (s+1)}{x+s+2} \binom{n}{s} \psi_{n-1}(-s-2). \end{cases}$$

Appliquons ensuite les formules

$$\psi_{n-1}(n+s-1) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-s-1)!\,\mathfrak{C}^n_{n-s+1}}{(2n-s)!},$$

il résulte finalement, en vertu de (9),

$$(10) \quad \psi_{n-1}(x) = \frac{\omega_n(x+2)}{(2n)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} \frac{\mathfrak{C}^n_{n-s+1}}{x+n-s+1},$$

d'où, en vertu des valeurs de $\psi_{2n-1}(0)$ et $\psi_{2n-1}(-1)$, les expressions explicites de nombres de Bernoulli:

$$(11) \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\binom{4n}{2n}B_n = \sum_{s=0}^{s=2n-1}(-1)^s\binom{4n}{s}\frac{\mathfrak{C}_{2n-s+1}^{2n}}{2n-s+1}$$

$$(11 \text{ bis}) \qquad \frac{(-1)^{n}}{2n}\binom{4n}{2n}B_n = \sum_{s=0}^{s=2n-1}(-1)^s\binom{4n}{s}\frac{\mathfrak{C}_{2n-s+1}^{2n}}{2n-s},$$

tandis que les valeurs numériques

$$\psi_{2n}(0) = \psi_{2n}(-1) = 0$$

donnent de même

$$(12) \qquad 0 = \sum_{s=0}^{s=2n-2}(-1)^s\binom{4n-2}{s}\frac{\mathfrak{C}_{2n-s}^{2n-1}}{2n-s}$$

$$(12 \text{ bis}) \qquad 0 = \sum_{s=0}^{s=2n-2}(-1)^s\binom{4n-2}{s}\frac{\mathfrak{C}_{2n-s}^{2n-1}}{2n-s-1}.$$

Revenons maintenant à la formule générale (10), une simple réduction donnera

$$(13) \quad \begin{cases} \Psi_{2n}(x) = \\ = (x-n+1)\binom{x+n+1}{2n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{s}\frac{\mathfrak{C}_{n-s+1}^{n}}{x+n-s+1}, \end{cases}$$

d'où, en supposant $x$ égal au positif entier $p \geqq n$,

$$(14) \quad \begin{cases} C_{p+1}^{n} = \\ = (p-n+1)\binom{p+n+1}{2n}\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}(-1)^s\binom{2n}{s}\frac{\mathfrak{C}_{n-s+1}^{n}}{p+n-s+1}; \end{cases}$$

cette formule, due à SCHLÖMILCH [1], représente évidemment l'expression explicite la plus simple connue pour les nombres de STIRLING de première espèce.

[1] Journal de Crelle, t. 44, p. 352, 1852. Compendium der höheren Analysis, t. II, p. 28, 3e édition, Brunswick 1879.

## XVI.— Séries de polynomes $\psi_n(x)$.

Remarquons que la série de puissances

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1+(x+1)\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty}\psi_n(x)\,\alpha^{n+1}$$

a son rayon de convergence égal à $2\pi$, il résulte, quel que soit $x$,

(1) $$\lim_{n=\infty}\text{sup.}\left|\sqrt[n]{\psi_n(x)}\right| = \frac{1}{2\pi}.$$

Or, il est possible d'obtenir des résultats beaucoup plus généraux, concernant la valeur de $\psi_n(x)$, pour $n$ extrêmement grand. En effet, soit $C_r$ la circonférence, prise dans le sens direct, du cercle $|x| = r$, où $r < 2\pi$, l'intégrale de Cauchy donnera

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} \doteq \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C_r}\frac{(1-e^{-t})^{-x-1}\,dt}{(t-\alpha)\,t^{-x-1}}.$$

Supposons maintenant $\Re(x) < 0$, l'intégrale curviligne susdite a un sens pour $r = 2\pi$ et représente par conséquent la fonction analytique dont il s'agit, ce qui donnera

$$(x+1)\,\psi_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{C_{2\pi}}\frac{(1-e^{-t})^{-x-1}\,dt}{t^{n-x}},$$

d'où, en posant $t = 2\pi e^{\theta i}$,

(2) $$(2\pi)^{n-x}(x+1)\,\psi_n(x) = \int_0^{2\pi}\left(1-e^{-2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1} e^{(x-n+1)\theta i}\,d\theta,$$

de sorte que nous aurons

(3) $$(2\pi)^n\cdot|(x+1)\,\psi_n(x)| < \int_0^{2\pi}\left|\left(1-e^{-2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1}\right| e^{|x|\theta}\,d\theta,$$

parce que nous avons supposé $\Re(x) < 0$.

Étudions maintenant l'ensemble $\mathfrak{E}$ des valeurs de $x$ qui satisfont aux deux conditions

(4) $$\Re(x) \leqq -\delta < 0\,, \quad |x| \leqq \rho\,,$$

où $\delta$ et $\rho$ sont des nombres positifs, dont le premier est arbitrairement petit, le second arbitrairement grand, l'intégrale définie qui figure au second membre de (3) a, dans l'ensemble $\mathfrak{E}$, une valeur maximum $M$, ce qui donnera, quel que soit l'indice $n$,

(5) $$|(x+1)\,\psi_n(x)| < \frac{M}{(2\pi)^n},$$

où nous aurons évidemment, pour $\delta$ très petit, $M > 1$.

Cela posé, prenons pour point de départ la formule récursive

$$(n+1)\,\psi_n(x) =$$
$$= \frac{x+1}{2}\,\psi_{n-1}(x) - \psi_n(0) + (x+1)\cdot\sum_{\mu=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{\mu} B_\mu}{(2\mu)!}\,\psi_{n-2\mu}(x),$$

savoir la formule (7) de l'article XIV, puis appliquons la formule eulérienne[1] bien connue

$$\frac{B_\mu\,(2\pi)^{2\mu}}{(2\mu)!} = 2\left(\frac{1}{1^{2\mu}} + \frac{1}{2^{2\mu}} + \frac{1}{3^{2\mu}} + \dots\right) = 2 s_{2\mu}\,,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (5),

(6) $$(n+1)(2\pi)^n|\psi_n(x)| < \pi M + (2\pi)^n|\psi_n(0)| + 2M\cdot\sum_{\mu=1}^{\leqq \frac{n}{2}} s_{2\mu}.$$

Soit maintenant $n$ un nombre pair, on trouvera

$$\psi_{2n}(0) = 0$$
$$s_{2\mu} \leqq s_2 = \frac{\pi^2}{6} < \pi\,,$$

ce qui donnera, en vertu de (6),

$$(2\pi)^{2n}\,|\,\psi_{2n}(x)| < \pi M.$$

[1] Introductio in analysin infinitorum, t. 1, § 168; 1748.

Soit, au contraire, $n$ un nombre impair, nous aurons

$$(2\pi)^{2n+1} |\psi_{2n+1}(0)| = \frac{s_{2n+2}}{2\pi} \leq \frac{s_2}{2\pi} = \frac{\pi}{12} < \pi,$$

de sorte que nous trouvons, dans ce cas[1],

$$(2\pi)^{2n+1} |\psi_{2n+1}(x)| < \pi M,$$

de sorte que nous avons démontré la proposition suivante:

I. Supposons que la variable $x$ appartienne à l'ensemble $\mathfrak{E}$, le polynome $\psi_n(x)$ satisfait, quel que soit l'indice $n$, à l'inégalité

$$(2\pi)^n \cdot |\psi_n(x)| < \pi M, \tag{7}$$

où $M$ désigne la valeur maximum de l'intégrale définie qui figure au second membre de (3).

Soit plus généralement $\mathfrak{E}_r$ l'ensemble des valeurs de $x$, déterminées par les deux conditions

$$\Re(x) \leq -r - \delta, \quad |x| \leq \rho, \tag{8}$$

où $r$ désigne un positif entier, nous aurons évidemment

$$|x+r| < |x+r-1| < \ldots < |x+1| < |x| \tag{9}$$

$$|n-x| > |n-x+1| > \ldots > |n-x+r| > n. \tag{9 bis}$$

Cela posé, nous avons à démontrer la proposition générale:

II. Supposons que la variable $x$ appartienne à l'ensemble $\mathfrak{E}_r$, les polynomes de Stirling satisfont, quel que soit l'indice $n$, à l'inégalité

$$(2\pi)^n |\psi_n(x)| < \frac{(2\pi+1)^r \rho^{r-1} \pi M}{n^r}. \tag{10}$$

[1] Nous supposons $M > 1$, ce qui est évident; or, désignant par $M$ le plus grand des nombres 1 et la valeur maximum de l'intégrale qui figure au second membre de (3), on voit que les résultats suivants sont exacts, parce que la valeur numérique qui figure au premier membre de (7) est plus petite qu'une constante fixe.

Étudions tout d'abord le cas $r = 1$, l'équation fonctionnelle

$$(x+2)\psi_n(x+1) = (x-n)\psi_n(x) + (x+1)\psi_{n-1}(x)$$

donnera immédiatement, pourvu que $x \neq n$,

$$(11) \quad |\psi_n(x)| \leqq \frac{|(x+2)\psi_n(x+1)| + |(x+1)\psi_{n-1}(x)|}{|n-x|}.$$

Or, remarquons que les deux nombres $x$ et $x+1$ appartiennent tous deux à l'ensemble $\mathfrak{E}$, pourvu que $x$ appartienne à $\mathfrak{E}_1$, il résulte, en vertu de (7),

$$(2\pi)^n \cdot |\psi_n(x)| < \frac{(2\pi+1)\pi M}{|n-x|},$$

ce qui donnera immédiatement, en vertu de (9 bis), la formule (10) pour $r = 1$.

Supposons maintenant valable, dans l'ensemble $\mathfrak{E}_m$, l'inégalité

$$(12) \qquad (2\pi)^n|\psi_n(x)| < \frac{(2\pi+1)^m \rho^{m-1}\pi M}{|n-m+1-x|^m},$$

puis supposons que $x$ appartienne à l'ensemble $\mathfrak{E}_{m+1}$, il est évident que $x+1$ appartient toujours à l'ensemble $\mathfrak{E}_m$, de sorte que la formule est applicable si nous y remplaçons $x$ par $x+1$, ce qui donnera, en vertu de (11),

$$(2\pi)^n|\psi_n(x)| <$$
$$< \frac{(2\pi+1)^m \rho^m \pi M}{|n-x|}\left(\frac{1}{|n-m-x|^m} + \frac{2\pi}{|n-m+1-x|^m}\right),$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (9 bis),

$$(2\pi)^n|\psi_n(x)| < \frac{(2\pi+1)^{m+1}\rho^m \pi M}{|n-m-x|^{m+1}} < \frac{(2\pi+1)^{m+1}\rho^m \pi M}{n^{m+1}}.$$

Quant aux valeurs positives de $\Re(x)$, désignons par $E_r$ l'ensemble des valeurs de $x$ qui satisfont aux deux conditions

$$(13)\qquad r-1-\delta \leqq \Re(x) \leqq r-\delta, \quad |x| \leqq \rho,$$

où $r$ désigne un positif entier, nous aurons cette autre proposition, supplémentaire à la précédente:

III. Supposons que la variable $x$ appartienne à l'ensemble $E_r$, les polynomes de Stirling satisfont, quel que soit $n$, à l'inégalité

$$(14)\qquad (2\pi)^n |\psi_n(x)| < (2\pi+1)^r n^r \pi M.$$

Étudions tout d'abord le cas, où $x+1$ appartient à l'ensemble $E_1$, il est évident que $x$ doit appartenir à l'ensemble $\mathfrak{E}$, savoir satisfaire aux conditions

$$-1-\delta \leqq \Re(x) \leqq -\delta < 0, \quad |x| \leqq \rho,$$

de sorte que l'équation fonctionnelle des $\psi_n(x)$ donnera immédiatement

$$(15)\left\{\begin{aligned} &(2\pi)^n |\psi_n(x+1)| < \\ &< \left|\frac{n-x}{x+2}\right| (2\pi)^n |\psi_n(x)| + \frac{(2\pi)^n}{|x+2|} |(x+1)\psi_{n-1}(x)|, \end{aligned}\right.$$

et nous aurons par conséquent

$$|x+2| > |x+1|, \quad |x+2| > \rho-1$$
$$|n-x| \leqq n+\rho < (\rho-1)n.$$

ce qui donnera

$$(2\pi)^n |\psi_n(x+1)| < n\pi M + 2\pi^2 M < n(2\pi+1)\pi M,$$

savoir la formule (14), pour $r=1$.

Supposons maintenant vraie la formule générale (14), puis supposons que $x+1$ appartienne à l'ensemble $E_{r+1}$, de sorte que $x$ est évidemment situé dans l'ensemble $E_r$, nous aurons par conséquent, en vertu de (15),

$$(2\pi)^n |\psi_n(x+1)| < (2\pi+1)^{r+1} n^{r+1} \pi M,$$

et la conclusion de $r$ à $r+1$ est établie.

Combinons maintenant les deux propositions II et III, il résulte le théorême général:

IV. Supposons $|x| \leqq \rho$, les polynomes de Stirling satisfont, quel que soit l'indice $n$, à l'inégalité

$$(2\pi)^n |\psi_n(x)| < (2\pi+1)^\rho n^\rho \rho^{\rho-1} \pi M. \tag{16}$$

Cela posé, il est très facile de démontrer cette autre théorème:

V. Soit

$$\lim_{n=\infty} \sup. \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \sigma < 2\pi, \tag{17}$$

la série de polynomes de Stirling

$$F(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \ldots + a_n\psi_n(x) + \ldots \tag{18}$$

est absolument convergente, quel que soit $x$, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$, de sorte que $F(x)$ est une transcendante entière.

La convergence absolue de la série (18) est une conséquence immédiate de (1) et (17), tandis que la convergence uniforme résulte de l'inégalité (16).

Quant à la série (18), elle ne peut jamais converger, pourvu que $\sigma > 2\pi$, tandis que l'hypothèse $\sigma = 2\pi$, exige des recherches ultérieures.

Posons par exemple, dans la formule

$$\left(\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)^{-x-1} = 1 + (x+1) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \psi_n(x)\, \alpha^{n+1}$$

$\alpha = 2\pi i$, la série ainsi obtenue est absolument et uniformément convergente, pourvu que $x$ appartienne à l'ensemble $\mathfrak{E}_2$, de sorte que nous aurons

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2\pi)^{2n} \psi_{2n}(x) = 0 \tag{19}$$

$$\text{(19 bis)} \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2\pi)^{2n+2} \psi_{2n+1}(x) = \frac{1}{x+1},$$

formules qui sont valables, pourvu que $\Re(x) < -2$.

Supposons maintenant remplie la condition (17), puis posons, conformément au développement (18),

$$\text{(20)} \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

la formule (2) donnera immédiatement

$$\frac{x+1}{(2\pi)^x} \cdot a_n \psi_n(x) = \int_0^{2\pi} \left(1 - e^{2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1} e^{(x+1)\theta i} \, a_n \left(\frac{e^{-\theta i}}{2\pi}\right)^n d\theta,$$

de sorte que les deux fonctions analytiques $F(x)$ et $f(x)$ sont liées par l'équation intégrale

$$\text{(21)} \qquad \frac{x+1}{(2\pi)^x} \cdot F(x) = \int_0^{2\pi} \left(1 - e^{2\pi e^{\theta i}}\right)^{-x-1} e^{(x+1)\theta i} f\left(\frac{e^{-\theta i}}{2\pi}\right) d\theta,$$

où il faut supposer naturellement $\Re(x) < 0$.

On voit que cette formule intégrale n'est pas applicable pour les deux séries (19) et (19 bis), séries qui correspondent à l'hypothèse $\sigma = 2\pi$.

Citons encore, en terminant cet article, une intégrale curviligne qui représente le nombre $\mathfrak{C}_{n+1}^r$.

A cet effet, appliquons les valeurs limites

$$\text{(22)} \qquad \lim_{t=p} \frac{n!\, t^{n+r-1}}{(t-1)(t-2)\ldots(t-n)} = (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p^{n+r},$$

puis désignons par $C$ la circonférence d'un cercle ayant son centre dans l'Origine et son rayon plus grand que $n$, il résulte immédiatement

$$\text{(23)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{n!\, t^{n+r-1}\, dt}{(t-1)(t-2)\ldots(t-n)} = \mathfrak{C}_{n+1}^r.$$

Du reste, on voit que les valeurs limites (22) donnent cette autre formule plus générale

$$(24)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{n!\, f(t+\alpha)\, dt}{t(t-1)\ldots(t-n)} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1^s \binom{n}{s} f(\alpha+n-s),$$

où $f(\alpha+t)$ est holomorphe sur la circonférence et dans l'intérieur du cercle $C$.

## QUATRIÈME PARTIE

## Résultats numériques.

---

### XVII. — Les coefficients des $\psi_n(x)$.

Quant aux coefficients $\alpha_{n,r}$ du polynome $\psi_n(x)$, savoir

$$(1) \quad \psi_n(x) = \alpha_{n,0}\, x^n + \alpha_{n,1}\, x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n,n-1}\, x + \alpha_{n,n},$$

il est évident que les expressions explicites, développées dans l'article XV, donnent des expressions explicites de ces coefficients.

Prenons par exemple pour point de départ la formule (8), savoir

$$(x+1)\,\psi_{n-1}(x) = \sum_{s=1}^{s=n} \binom{x+s}{s} A_{s,n},$$

où

$$A_{s,n} = \frac{r!\,(n-1)!}{(n+r)!} \cdot \sum_{r=1}^{s=s} \frac{(-1)^{n+s}}{s!} \binom{n+r}{r-s} \mathfrak{C}_{s+1}^{n},$$

puis posons pour abréger

$$(x+2)(x+3)\ldots(x+r) = c_{r,0}\, x^{r-1} + c_{r,1}\, x^{r-2} + \ldots + c_{r,r-1},$$

il résulte l'expression explicite

$$(2) \qquad \alpha_{n-1,p} = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{c_{n-s,\,p-s}}{(n-s)!} A_{n-s,n}$$

qui est un peu compliquée.

La formule (10) de l'article XV, savoir

$$\psi_{n-1}(x) = \frac{\omega_n(x+2)}{(2n)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s \binom{2n}{s} \frac{\mathfrak{C}_{n-s+1}^{n}}{x+n-s+1},$$

donnera un résultat plus simple.

En effet, posons pour abréger

$$\frac{\omega_n(x+2)}{x+k} = d_{n,0}^{(k)} x^{n-1} + d_{n,1}^{(k)} x^{n-2} + \ldots + d_{n,n-1}^{(k)},$$

où il faut supposer naturellement $2 \leqq k \leqq n+1$, nous aurons

$$(3) \qquad \alpha_{n-1,p} = \frac{1}{(2n)!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} -(1)^s \binom{2n}{s} \mathfrak{S}_{n-s+1}^{n}\, d_{n,p}^{(n-s+1)},$$

expression qui est aussi assez compliquée pour un calcul direct des coefficients $\alpha_{n-1,p}$. De plus, on voit que les expressions explicites que nous venons d'indiquer contiennent des nombres de Stirling qu'il s'agit précisément de déterminer.

Cela posé, nous avons à revenir à des formules récursives qui permettent de déterminer successivement les coefficients $\alpha_{n,p}$.

A cet effet, remarquons que nous avons déjà donné une formule récursive de ce genre, savoir la formule (6 bis) de l'article V, formule qui se présente aussi sous la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (2r-p+2)\,\alpha_{r,p} = \\ & = \alpha_{r-1,p} + \alpha_{r-1,p-1} - \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{r-s}{p-s} \frac{r+p-2s+2}{p-s+1} \alpha_{r,s}, \end{aligned} \right.$$

et qui n'est autre chose qu'une équation aux différences finies, linéaire et du premier ordre, pourvu que les coefficients

$$\alpha_{r,0},\ \alpha_{r,1},\ \ldots,\ \alpha_{r,p-1}$$

soient connus pour des valeurs quelconques de $r$.

Or, il est évident que les formules récursives que nous venons de développer, pour les $\psi_n(x)$, donnent plusieurs autres équations du même genre.

En premier lieu, appliquons la formule (7) de l'article XIV, savoir

$$(r+1)\,\psi_r(x) =$$

$$= \frac{x+1}{2}\,\psi_{r-1}(x) - \psi_r(0) + (x+1)\cdot\sum_{s=1}^{\leqq \frac{r}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\,\psi_{r-2s}(x),$$

nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(r+1)\,\alpha_{r,p} = \\ &= \frac{\alpha_{r-1,p}+\alpha_{r-1,p-1}}{2} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p+1}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\cdot \alpha_{r-2s,\,p-2s+1} + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\cdot \alpha_{r-2s,\,p-2s}\,, \end{aligned}\right.$$

où il faut, pour $p = 1$, supprimer la dernière somme qui figure au second membre. Multiplions maintenant par 2 les deux membres de (5), puis soustrayons (4), il résulte la formule récursive

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} p\,\alpha_{r,p} &= \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{r-s}{p-s} \frac{r+p-2s+2}{p-s+1}\,\alpha_{r,s} + \\ &\quad 2\cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p+1}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\,\alpha_{r-2s,\,p-2s+1} + \\ &\quad + 2\cdot \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p}{2}} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!}\,\alpha_{r-2s,\,p-2s}\,, \end{aligned}\right.$$

formule qui permet de déterminer directement le coefficient $\alpha_{r,p}$, pourvu que les coefficients précédents soient connus.

On aura par exemple

$$(7)\qquad \alpha_{r,1} = -\frac{r\,(r-5)}{(r+1)!\;2^{r+1}\cdot 6}.$$

En second lieu, étudions la formule (13) de l'article XII, savoir

$$(r+1)\,\psi_r(x) = \frac{1}{(r+2)!} + \sum_{s=0}^{s=r-1} \frac{(x-r+s+1)\,\psi_{r-s-1}(x)}{(s+2)!},$$

nous aurons de même

$$(8)\quad \begin{cases} (r+1)\,\alpha_{r,\,p} = \\ = \displaystyle\sum_{s=0}^{s=p} \frac{\alpha_{r-s-1,\,p-s}}{(s+2)!} - \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{(r-s-1)\,\alpha_{r-s-1,\,p-s-1}}{(s+2)!}, \end{cases}$$

ce qui donnera, en vertu de (4),

$$(9)\quad \begin{cases} p\,\alpha_{r,\,p} = -\alpha_{r-1,\,p-1} + \\ + \displaystyle\sum_{s=0}^{r=p-1} \binom{r-s}{p-s} \frac{r+p-2s+2}{p-s+1}\,\alpha_{r-s-1,\,p-s-1} + \\ + \displaystyle\sum_{s=1}^{s=p} \frac{2\,\alpha_{r-s-1,\,p-s}}{(s+2)!} - \sum_{s=0}^{s=p+1} \frac{(2r-2s-2)\,\alpha_{r-s-1,\,p-r-1}}{(s+2)!}, \end{cases}$$

En dernier lieu, prenons pour point de départ la formule (7) de l'article II, savoir

$$n\,C_n^r = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{n-r+s}{s+1} C_{n+1}^{r-s},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$x\,\Psi_{2r}(x-1) = \sum_{s=0}^{s=r} (-1)^s \binom{x-r+s}{s+1} \Psi_{2r-2s}(x);$$

introduisons ensuite les $\psi_m(x)$, puis posons $r+1$ au lieu de $r$, nous aurons

$$(10)\quad x\,\psi_r(x-1) = (x+1)\cdot \sum_{s=0}^{s=r} \frac{(-1)^r\,\psi_{r-s}(x)}{(s+1)!} - \frac{(-1)^r}{(r+2)!},$$

ce qui donnera

$$(11)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{s=p} (-1)^{p-s+1} \binom{r-s}{p-s+1} \alpha_{r,\,s} = \sum_{s=0}^{s=p} \frac{(-1)^s\,\alpha_{r-s,\,p-s}}{(s+1)!} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{s=1}^{s=p+1} \frac{(-1)^s\,\alpha_{r-s,\,p-s+1}}{(s+1)!}, \end{cases}$$

de sorte que nous aurons, en vertu de (8),

$$(12)\quad\begin{cases} (p+1)\,\alpha_{r,\,p} = \sum\limits_{s=0}^{s=p-1} (-1)^s \binom{r-p+s+1}{s+2} \alpha_{r,\,p-s-1} + \\ \qquad + \sum\limits_{s=0}^{\leq \frac{p-1}{2}} \dfrac{2\,\alpha_{r-2s-2,\,p-2s-1}}{(2s+3)\,!} - \\ \qquad - \sum\limits_{s=0}^{s=p-1} \dfrac{\left(r-s+1+(-1)^s\right)\alpha_{r-s-1,\,p-s-1}}{(s+2)\,!}, \end{cases}$$

où il faut supposer naturellement $p \geqq 1$.

## XVIII.—Nature analytique des coefficients.

Les formules récursives que nous venons d'établir sont très compliquées pour un calcul successif des coefficients $\alpha_{r,\,p}$. Or, les formules en question donnent des éclaircissements intéressants concernant la nature analytique des $\alpha_{r,\,p}$.

A cet effet, posons, conformément à l'expression obtenue pour $\alpha_{r,\,1}$,

$$(1)\qquad \alpha_{r,\,p} = \frac{\beta_{r,\,p}}{(r+1)\,!\,2^{r+1}},$$

nous aurons évidemment

$$(2)\qquad \beta_{r,\,1} = -\frac{r(r-5)}{6}, \quad \beta_{r,\,0} = 1,$$

et la conclusion ordinaire de $p$ à $p+1$ donnera, en vertu de la formule (12) de l'article précédent, la proposition générale:

I. Les nombres $\beta_{r,\,p}$, définis par la formule (1), se présentent toujours sous la forme d'un polynome entier du dégré $2p$ par rapport à $r$.

Posons, conformément à cette propriété de $\beta_{r,\,p}$,

$$(3)\qquad \alpha_{r,\,p} = \frac{\beta_{2p}(r)}{(r+1)\,!\,2^{r+1}},$$

il résulte, en vertu de la formule (4) de l'article précédent, que le polynome $\beta_{2p}(x)$ satisfait à l'équation aux différences finies du premier ordre

$$(4)\quad \begin{cases} (2x-p+2)\,\beta_{2p}(x) - (2x+2)\,\beta_{2p}(x-1) = \\ = (2x+2)\,\beta_{2p-2}(x-1) - \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{x-s}{p-s} \dfrac{x+p-2s+2}{p-s+1}\,\beta_{2s}(x), \end{cases}$$

tandis que la formule (6) de l'article susdit donnera la formule récursive

$$(5)\quad \begin{cases} p\,\beta_{2p}(x) = \sum_{s=0}^{s=p-1} \binom{x-s}{p-s} \dfrac{x+p-2s+2}{p-s+1}\,\beta_{2s}(x) + \\ + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p+1}{2}} (-1)^s\, 2^{2s+1} \binom{x+1}{2s} B_s\, \beta_{2p-4s+2}(x-2s+1) + \\ + (x+1) \sum_{s=1}^{\leqq \frac{p}{2}} (-1)^s\, 2^{2s+1} \binom{x}{2s} B_s\, \beta_{2p-4s}(x-2s). \end{cases}$$

Remarquons maintenant que le coefficient $\alpha_{s,p}$ n'a aucun sens pour $0 \leqq r \leqq p-1$, il est évident que le polynome $\beta_{2p}(x)$ s'évanouira pour de telles valeurs de $x$, de sorte que nous aurons la proposition suivante:

II. *Soit* $p \geqq 1$, *le polynome* $\beta_{2p}(x)$ *est toujours divisible par le produit*

$$x(x-1)\ldots(x-p+1),$$

*de sorte que nous aurons*

$$(6)\quad \beta_{2p}(x) = x(x-1)\ldots(x-p+1)\,\sigma_p(x), \quad \beta_0(x) = \sigma_0(x),$$

*où* $\sigma_p(x)$ *est un polynome du degré* $p$ *par rapport à* $(x)$.

On voit que cette propriété de $\beta_{1p}(x)$ ne se présente pas comme une conséquence immédiate des formules (4) et (5). En effet, posons, dans (4), $x = 0$, nous aurons, en vertu de (6),

$$\beta_{2p}(-1) = -\beta_{2p-2}(-1),$$

ce qui donnera

$$\beta_{2p}(-1) = (-1)^p, \tag{7}$$

de sorte que nous aurons

$$\sigma_p(-1) = \frac{1}{p!}. \tag{8}$$

Supposons maintenant dès à présent donnée la valeur

$$\beta_{2p}(0) = 0, \quad p \geqq 1,$$

la conclusion de $p$ à $p+1$, donnera immédiatement, en vertu de (4), l'expression générale (6).

Quant aux polynomes $\sigma_p(x)$, définis par la formule (6), la valeur numérique

$$\alpha_{2p,\,2p} = 0, \quad p \geqq 1,$$

donnera la proposition:

III. Soit $p \geqq 1$, le polynome $\sigma_{2p}(x)$ est toujours divisible par $x - 2p$.

Introduisons maintenant, dans (4), les expressions tirées de (6), il résulte l'équation aux différences finies du premier ordre

$$\left\{\begin{aligned} &(2x - p + 2)\,\sigma_p(x) = \\ &= \frac{2(x+1)(x-p)}{x}\sigma_p(x-1) + \frac{2(x+1)}{x}\sigma_{p-1}(x-1) - \\ &- \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{x+p-2s+2}{(p-s+1)!}\sigma_s(x), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

qui, suppléée par la valeur numérique (8), détermine parfaitement le polynome $\sigma_p(x)$, pourvu que les polynomes précédents soient connus.

La formule (5) donnera de même

$$(10)\left\{\begin{aligned} p\,\sigma_p(x) &= \sum_{s=0}^{s=p-1} \frac{x+p-2s+2}{(p-s+1)!}\cdot\sigma_s(x)+\\ &+(x+1)\cdot\sum_{s=1}^{\leqq\frac{p+1}{2}}\frac{(-1)^s\,2^{2s+1}\,B_s}{(2s)!}\cdot\sigma_{p-2s+1}(x-s+1)+\\ &+(x+1)\cdot\sum_{s=1}^{\leqq\frac{p}{2}}\frac{(-1)^s\,2^{2s+1}\,B_s}{(2s)!}\cdot\sigma_{p-2s}(x-2s). \end{aligned}\right.$$

Nous renonçons aux autres formules récursives pour les $\sigma_p(x)$, obtenues des formules (9) et (12) de l'article précédent, parce qu'elles deviennent aussi compliquées que celles que nous venons de développer.

Revenons encore une fois à la formule (6) qui nous donne lieu à une remarque sur nos recherches précédentes. En effet, dans notre étude des nombres de STIRLING du rang $n+1$ et de l'ordre $p$, savoir les $C_{n+1}^p$ et les $\mathfrak{C}_{n+1}^p$, nous avons remplacé le positif entier $n$ par une variable continue $x$, ce qui à donné les polynomes $\Psi_{2p}(x)$. En introduisant ensuite les polynomes de STIRLING, savoir

$$\Psi_{2p}(x) = (x+1)\,x\,(x-1)\ldots(x-p+1)\,\psi_{p-1}(x),$$

la détermination des $\Psi_{2p}(x)$ à l'aide des $\psi_{p-1}(x)$ renferme une factorielle du rang $p$, dont l'étude est précisément le problème que nous nous sommes proposé de résoudre.

De plus, l'étude directe du polynome $\psi_r(x)$, savoir l'étude de ces coefficients $\alpha_{r,\,p}$ nous conduira de nouveau, comme le montre clairement la formule (6), à une factorielle du rang $p$.

Ces remarques montrent clairement qu'une étude approfondie des nombres de STIRLING est un problème extrêmement compliqué.

## XIX.—Les premiers polynomes $\psi_n(x)$.

En appliquant la formule (9) de l'article précédent j'ai trouvé les cinq premiers des fonctions $\sigma_p(x)$, savoir

$$\sigma_0(x) = 1$$

$$\sigma_1(x) = -\frac{x-5}{6}$$

$$\sigma_2(x) = \frac{(x-2)(x-11)}{3^2 \cdot 8}$$

$$\sigma_3(x) = -\frac{1}{6^4 \cdot 5}(5x^3 - 120x^2 + 619x - 336)$$

$$\sigma_4(x) = \frac{x-4}{6!\,6^3}(5x^3 - 170x^2 + 1271x + 150);$$

comme contrôle on aura la formule (8) de l'article précédent, savoir

$$\sigma_p(-1) = \frac{1}{p!}.$$

Quant aux coefficients des polynomes de Stirling, savoir

$$\psi_r(x) = \alpha_{r,0}x^r + \alpha_{r,1}x^{r-1} + \ldots + \alpha_{r,r-1}x + \alpha_{r,r},$$

on aura

$$\alpha_{r,p} = \frac{\sigma_p(r)}{(r-p)!\,(r+1)\,2^{r+1}},$$

de sorte que les résultats précédents nous permettent de calculer successivement les cinq premiers des $\psi_r(x)$.

Or, le calcul des polynomes susdits peut être étendu plus loin à l'aide des formules récursives que nous venons d'établir, et parmi lesquelles la formule (7) de l'article XIV est la plus commode.

En appliquant les valeurs des premiers nombres de Bernoulli, savoir

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},$$

j'ai calculé les sept premiers des polynomes de STIRLING, savoir

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{4!}(3x+2)$$

$$\psi_2(x) = \frac{x(x+1)}{4!\,2}$$

$$\psi_3(x) = \frac{1}{6!\,2^3}(15x^3+15x^2-10x-8)$$

$$\psi_4(x) = \frac{x(x+1)}{6!\,2^4}(3x^2-x-6)$$

$$\psi_5(x) = \frac{1}{9!\,2^3}(63x^5-315x^3-224x^2+140x+96)$$

$$\psi_6(x) = \frac{x(x+1)}{9!\,2^4}(9x^4-18x^3-57x^2+34x+80),$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$\psi_1(x) = \frac{x}{8}+\frac{1}{12}$$

$$\psi_2(x) = \frac{x^2}{48}+\frac{x}{48}$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{384}+\frac{x^2}{384}-\frac{x}{576}-\frac{1}{720}$$

$$\psi_4(x) = \frac{x^4}{3840}+\frac{x^3}{5760}-\frac{7x^2}{11520}-\frac{x}{1920}$$

$$\psi_5(x) = \frac{x^5}{46080}-\frac{x^3}{9216}-\frac{x^2}{12960}+\frac{x}{20736}+\frac{1}{30240}$$

$$\psi_6(x) = \frac{x^6}{645120}-\frac{x^5}{645120}-\frac{5x^4}{387072}-\frac{23x^3}{5806080}+$$
$$+\frac{19x^2}{967680}+\frac{x}{72576}.$$

On voit que $\psi_5(x)$ ne contient pas la puissance $x^4$, ce qui est une conséquence de la valeur de $\sigma_1(x)$, savoir $\sigma_1(5) = 0$.

## XX.—Tables de Stirling et de M. Bertelsen.

Quant au calcul direct des nombres de Stirling, la méthode la plus commode est un calcul successif, à l'aide des formules récursives (15) de l'article I.

Abstraction faite des valeurs évidentes

$$C_2^1 = 1, \quad C_n^0 = 1, \quad n \geqq 0,$$

on trouve pour les $C_n^p$:

| $p$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ | $n=7$ | $n=8$ | $n=9$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 1 |
| 2 | 2 | 11 | 35 | 85 | 175 | 322 | 546 | 2 |
| 3 | | 6 | 50 | 225 | 735 | 1960 | 4536 | 3 |
| 4 | | | 24 | 274 | 1624 | 6769 | 22449 | 4 |
| 5 | | | | 120 | 1764 | 13132 | 67284 | 5 |
| 6 | | | | | 720 | 13068 | 118124 | 6 |
| 7 | | | | | | 5040 | 109584 | 7 |
| 8 | | | | | | | 40320 | 8 |

| $p$ | $n=10$ | $n=11$ | $n=12$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 45 | 55 | 66 | 1 |
| 2 | 870 | 1320 | 1925 | 2 |
| 3 | 9450 | 18150 | 32670 | 3 |
| 4 | 63273 | 157773 | 357423 | 4 |
| 5 | 269325 | 902055 | 2637558 | 5 |
| 6 | 723680 | 3416930 | 13339535 | 6 |
| 7 | 1172700 | 8409500 | 45995730 | 7 |
| 8 | 1026576 | 12753576 | 105258076 | 8 |
| 9 | 362880 | 10628640 | 150917976 | 9 |
| 10 | | 3628800 | 120543840 | 10 |
| 11 | | | 39916800 | 11 |

| $p$ | $n=13$ | $n=14$ | $n=15$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 78 | 91 | 105 | 1 |
| 2 | 2717 | 3731 | 5005 | 2 |
| 3 | 55770 | 91091 | 143325 | 3 |
| 4 | 749463 | 1474473 | 2749747 | 4 |
| 5 | 6926634 | 16669653 | 37312275 | 5 |
| 6 | 44990231 | 135036473 | 368411615 | 6 |
| 7 | 206070150 | 790943153 | 2681453775 | 7 |
| 8 | 657206836 | 3336118786 | 14409322928 | 8 |
| 9 | 1414014888 | 9957703756 | 56663366760 | 9 |
| 10 | 1931559552 | 20313753096 | 159721605680 | 10 |
| 11 | 1486442880 | 26596717056 | 310989260400 | 11 |
| 12 | 479001600 | 19802759040 | 392156797824 | 12 |
| 13 | | 6227020800 | 283465647360 | 13 |
| 14 | | | 87178291200 | 14 |

Quant aux nombres

$$\mathfrak{S}_{n+1}^{p} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} (-1)_s \binom{n}{s} (n-s)^{n+p},$$

nous aurons

$$\mathfrak{S}_p^0 = 1, \quad \mathfrak{S}_1^p = 0, \qquad p \geqq 1$$

$$\mathfrak{S}_2^p = 1, \qquad p \geqq 0$$

$$\mathfrak{S}_3^p = 2^{p+1} - 1.$$

Abstraction faite de ces valeurs spéciales, on trouvera pour les $\mathfrak{S}_n^p$:

| $p$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 1 |
| 2 | 7 | 25 | 65 | 140 | 2 |
| 3 | 15 | 90 | 350 | 1050 | 3 |
| 4 | 31 | 301 | 1701 | 6951 | 4 |
| 5 | 63 | 966 | 7770 | 42525 | 5 |

| $p$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 127 | 3025 | 34105 | 246730 | 6 |
| 7 | 255 | 9330 | 145750 | 1379400 | 7 |
| 8 | 511 | 28501 | 611501 | 7508501 | 8 |
| 9 | 1023 | 86526 | 2532530 | 40075035 | 9 |
| 10 | 2047 | 261625 | 10391745 | 210766920 | 10 |
| 11 | 4095 | 788970 | 42355950 | 1096190550 | 11 |
| 12 | 8191 | 2375101 | 171798901 | 5652751651 | 12 |
| 13 | 16383 | 7141686 | 694337290 | 28958095545 | 13 |
| 14 | 32767 | 21457825 | 2798806985 | 147589284710 | 14 |

| $p$ | $n=7$ | $n=8$ | $n=9$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 28 | 36 | 1 |
| 2 | 266 | 462 | 750 | 2 |
| 3 | 2646 | 5880 | 11880 | 3 |
| 4 | 22827 | 63987 | 159027 | 4 |
| 5 | 179487 | 627396 | 1899612 | 5 |
| 6 | 1323652 | 5715424 | 20912320 | 6 |
| 7 | 9321312 | 49329280 | 216627840 | 7 |
| 8 | 63436373 | 408741333 | 2141764053 | 8 |
| 9 | 420693273 | 3281882604 | 20415995028 | 9 |
| 10 | 2734926558 | 25708104786 | 189036065010 | 10 |
| 11 | 17505749898 | 197462483400 | 1709751003480 | 11 |
| 12 | 110687251039 | 1492924634839 | 15170932662679 | 12 |
| 13 | 693081601779 | 11143554045652 | 132511015347084 | 13 |
| 14 | 4306078895384 | 82310957214948 | 1142399079991620 | 14 |

| $p$ | $n=10$ | $n=11$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 45 | 55 | 1 |
| 2 | 1155 | 1705 | 2 |
| 3 | 22275 | 39325 | 3 |
| 4 | 359502 | 752752 | 4 |
| 5 | 5135130 | 12662650 | 5 |

| $p$ | $n=10$ | $n=11$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| 6 | 67128490 | 193754990 | 6 |
| 7 | 820784250 | 2758334150 | 7 |
| 8 | 9528822303 | 37112163803 | 8 |
| 9 | 106175395755 | 477297033785 | 9 |
| 10 | 1144614626805 | 5917584964655 | 10 |
| 11 | 12011282644725 | 71187132291275 | 11 |
| 12 | 123272476465204 | 835143799377954 | 12 |
| 13 | 1241963303533920 | 9593401297313460 | 13 |
| 14 | 12320068811796900 | 108254081784931500 | 14 |

| $p$ | $n=12$ | $n=13$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 66 | 78 | 1 |
| 2 | 2431 | 3367 | 2 |
| 3 | 66066 | 106470 | 3 |
| 4 | 1479478 | 2757118 | 4 |
| 5 | 28936908 | 62022324 | 5 |
| 6 | 512060978 | 1256328866 | 6 |
| 7 | 8391004908 | 23466951300 | 7 |
| 8 | 129413217791 | 411016633391 | 8 |
| 9 | 1900842429486 | 6833042030178 | 9 |
| 10 | 26826851689001 | 108823356051137 | 10 |
| 11 | 366282500870286 | 1672162773483930 | 11 |
| 12 | 4864251308951100 | 24930204590758260 | 12 |
| 13 | 63100165695775560 | 362262620784874680 | 13 |
| 14 | 802355904438462660 | 5149507353856958820 | 14 |

| $p$ | $n=14$ | $p$ |
|---|---|---|
| 1 | 91 | 1 |
| 2 | 4550 | 2 |
| 3 | 165620 | 3 |
| 4 | 4910178 | 4 |
| 5 | 125854638 | 5 |

| $p$ | $n = 14$ | $p$ |
|---|---|---|
| 6 | 2892439160 | 6 |
| 7 | 61068660380 | 7 |
| 8 | 1204909218331 | 8 |
| 9 | 22496861868481 | 9 |
| 10 | 401282560341390 | 10 |
| 11 | 6888836057922000 | 11 |
| 12 | 114485073343744260 | 12 |
| 13 | 1850568574253550060 | 13 |
| 14 | 29206898819153109600 | 14 |

Stirling[1] a calculé les nombres $C_n^p$ de $n = 1$ à $n = 9$, il indique la valeur $C_9^6 = 105056$, ce qui est faux, parce que nous aurons $C_9^6 = 118124$, faute de calcul qui a été observée par Binet[2], dans son grand Mémoire sur les intégrales eulériennes. Stirling[3] a aussi calculé une petite table des nombres $\mathfrak{C}_n^p$, il indique faussement $\mathfrak{C}_8^2 = 461$, tandis que nous aurons $\mathfrak{C}_8^2 = 462$.

Les autres valeurs numériques, données dans les tables précédentes, sont calculées par M. N.-P. Bertelsen; une partie des tables de M. Bertelsen est publiée par feu M. Thiele[4] qui indique, qu'une copie des tables complètes est conservée dans la bibliothèque de l'Observatoire de Copenhague. Or, une telle copie n'étant pas trouvable dans la bibliothèque susdite, M. Bertelsen[5] m'a montré l'amabilité de faire, une seconde fois, les calculs nécessaires pour suppléer aux résultats publiés par Thiele, concernant les nombres $\mathfrak{C}_n^p$.

[1] Methodus differentialis, p. 11; Londres 1730.

[2] Journal de l'École Polytechnique, cahier 26, p. 231; 1839.

[3] Methodus differentialis, p. 8.

[4] Interpolationsrechnung, p. 31—32. Leipsic 1909.

[5] Je prie mon ami d'agréer mes vifs remerciements et pour ses nouvelles calculations et pour sa correction des épreuves de cet article.

Quant aux nombres

$$\mathfrak{A}_n^m = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^m,$$

savoir

$$\mathfrak{A}_n^m = 0, \quad n > m$$

$$\mathfrak{A}_n^m = n!\, \mathfrak{C}_{n+1}^{m-n}, \quad m \geqq n,$$

ce qui donnera

$$\mathfrak{A}_1^m = 1, \quad m \geqq 1, \quad \mathfrak{A}_n^n = n!,$$

J.-F.-W. Herschel[1] a calculé cette petite table des valeurs des $\mathfrak{A}_n^p$:

| $p$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 3 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 4 | 14 | 36 | 24 | 0 | 0 | 4 |
| 5 | 30 | 150 | 240 | 120 | 0 | 5 |
| 6 | 62 | 540 | 1560 | 1800 | 720 | 6 |
| 7 | 126 | 1806 | 8400 | 16800 | 15120 | 7 |
| 8 | 254 | 5796 | 40824 | 126000 | 191520 | 8 |
| 9 | 510 | 18150 | 186480 | 834120 | 1905120 | 9 |
| 10 | 1022 | 55980 | 818520 | 5103000 | 16435440 | 10 |

| $p$ | $n=7$ | $n=8$ | $n=9$ | $n=10$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5040 | 0 | 0 | 0 | 7 |
| 8 | 141120 | 40320 | 0 | 0 | 8 |
| 9 | 2328480 | 1451520 | 362880 | 0 | 9 |
| 10 | 29635200 | 30240000 | 16329600 | 3628800 | 10 |

Plus tard Grunert[2] a calculé une partie de cette même table des $\mathfrak{A}_n^p$.

[1] A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences, Cambridge 1820. La table de Herschel est reproduite dans les Nouvelles Annales des Mathématiques, t. 13, p. 272; 1854.

[2] Mathematische Abhandlungen, p. 71; Altona 1822.

# TABLE DES MATIÈRES




Forelagt paa Mødet d. 9. Maj 1919.
Færdig fra Trykkeriet d. 30. November 1920.